

Lehrbuch
der
ebenen Elementar-Geometrie
(Planimetrie).

Zweiter Teil

Der Winkel und die parallelen Linien.

Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den
Ergebnissen der ungelösten Aufgaben.

Mit 201 Erklärungen und 113 in den Text gedruckten Figuren.

Für den Schulunterricht und das Selbststudium

bearbeitet

nach System Kleyer

von

Prof. Dr. J. Sachs.



Bremerhaven.

Verlag von L. v. Vangerow.

Der Wandel und die materielle Union
spannen Elementar-Beziehungen

Die Materie ist die Grundlage aller Erscheinungen. Sie ist die Ursache aller Bewegung und Veränderung. Die Materie ist die Grundlage aller Leben und Entwicklung. Die Materie ist die Grundlage aller Wissenschaft und Kunst. Die Materie ist die Grundlage aller Kultur und Zivilisation. Die Materie ist die Grundlage aller Menschheit und Welt.

Die Materie ist die Grundlage aller Erscheinungen. Sie ist die Ursache aller Bewegung und Veränderung. Die Materie ist die Grundlage aller Leben und Entwicklung. Die Materie ist die Grundlage aller Wissenschaft und Kunst. Die Materie ist die Grundlage aller Kultur und Zivilisation. Die Materie ist die Grundlage aller Menschheit und Welt.

Inhaltsverzeichnis.

Die ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

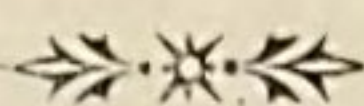
Zweiter Teil.

Der Winkel und die parallelen Linien.

	Seite
A. Ueber den Winkel	1
1) Ueber den Winkel im allgemeinen	1
2) Ueber das Vergleichen und Messen von Winkeln	5
3) Ueber die Arten der Winkel bezüglich ihrer Grösse	11
4) Ueber die Arten der Winkel bezüglich ihrer Lage	17
5) Ueber die Winkel der Vielecke	23
6) Ueber die Arten der Winkel beim Kreise	29
B. Ueber parallele Linien	33
1) Ueber Parallel-Linien im allgemeinen	33
2) Ueber besondere Fälle paralleler Linien	38

Aufgabensammlung.

A. Berechnungsaufgaben (gelöste)	47
Ungelöste Aufgaben	73
B. Konstruktionsaufgaben (gelöste)	75
Ungelöste Aufgaben	88
C. Aufgaben, in welchen die Beweise zu aufgestellten Behauptungen gefordert werden (gelöste)	90
Ungelöste Aufgaben	100
Das griechische Alphabet	103
Anhang: Ergebnisse der ungelösten Aufgaben	104



Inhaltsverzeichnis

Die chemische Analyse der organischen Substanzen

Zusammenfassung

Der Inhalt des Buches

1. Einleitung

1.1. Zweck und Umfang des Buches

1.2. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

1.3. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

1.4. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

1.5. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

1.6. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

2. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

2.1. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

2.2. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

3. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

3.1. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

3.2. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

3.3. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

3.4. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

3.5. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

3.6. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

3.7. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

3.8. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

3.9. Die chemische Analyse der organischen Substanzen

Ebene Elementar-Geometrie

(Planimetrie).

2. Teil.

Der Winkel und die parallelen Linien.

A. Ueber den Winkel.

1) Ueber den Winkel im allgemeinen.

Frage 1. Was ist ein Winkel?

Erkl. 1. Nach Lehrsatz 19 des ersten Teils ist durch zwei sich schneidende Gerade eine einzige Ebene eindeutig bestimmt.

Erkl. 2. Der eine der beiden Schenkel heisst auch Anfangsschenkel, der andere Endschenkel; den Flächenraum zwischen den beiden Schenkeln nennt man Winkelraum.

Erkl. 3. Der nebenstehend definierte Winkel heisst auch ein „ebener Winkel“. Die Planimetrie spricht nur von „ebenen“ Winkeln; der Begriff des „räumlichen Winkels“, welchen der gewöhnliche Sprachgebrauch mit dem Worte Winkel zu verbinden pflegt, tritt erst in der Stereometrie (Körperlehre) auf. (Siehe die Teile von Kleyers Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln).

Antwort. Ein Winkel ist ein Teil einer ebenen Fläche, welcher begrenzt wird von zwei bestimmten, in dieser Ebene liegenden Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt; jene beiden Strahlen, welche den Winkel zwischen sich einschliessen, heissen die Schenkel des Winkels, der gemeinsame Anfangspunkt der beiden Strahlen heisst der Scheitel des Winkels.

Frage 2. Wie kann man sich eine Vorstellung oder ein Bild eines Winkels machen?

Erkl. 4. Wie es nach Erkl. 39 des ersten Teils unmöglich ist, die beiden Strahlen vollständig zu ziehen, welche die Schenkel des Winkels sind, so kann man auch von einem Winkel immer nur dasjenige Stück zeichnen, welches auf der Papierebene gelegen ist.

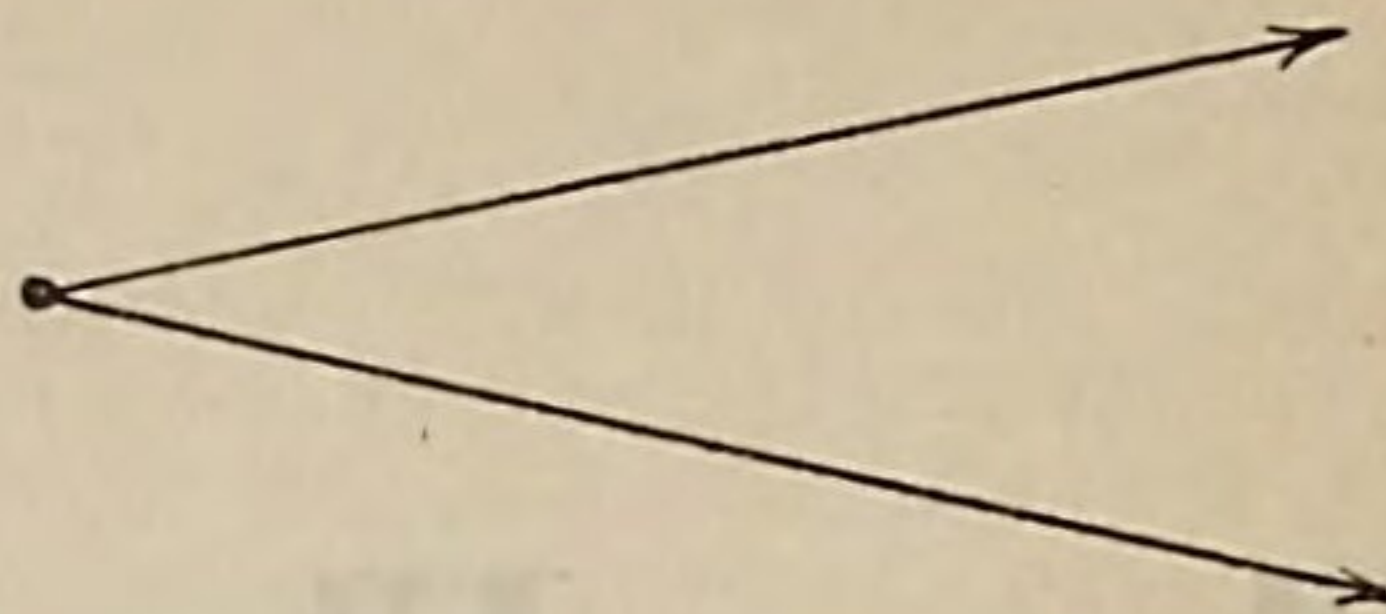
Erkl. 5. Man kann die Vorstellung unterstützen, indem man mit der Schere das Papier längs den Schenkeln bis zum Rande des Blattes

Antwort. Man kann sich eine Vorstellung oder ein Bild von einem Winkel machen, indem man (s. Figur 1) mittels Blei, Kreide, Tinte, Tusche oder eines anderen ähnlichen Materials von einem bestimmten, in einer Ebene, z. B. in der Papierebene liegenden Punkte *S* als Anfangspunkt zwei Strahlen zieht (s. Antwort 10 des ersten Teils) und denjenigen Teil der Ebene betrachtet, welcher zwischen diesen beiden Strahlen liegt.

durchschneidet und sich den freien Rand des ausgeschnittenen Papierstückes in weite Ferne gerückt denkt.

Erkl. 6. Nach Antwort auf Frage 2 und Erkl. 5 ist der Winkel stets nur ein unvollständig begrenzter Teil der Ebene, da sich der Winkelraum über den freien Rand längs den beiden Schenkeln ins Unendliche ausdehnt.

Figur 1.



Frage 3. Wie kann man sich einen Winkel entstanden denken?

Erkl. 7. Ueber die Bezeichnung der Strahlen $+s_1$ und $-s_1$, $+s_2$ und $-s_2$ siehe Erkl. 19 des ersten Teils.

Erkl. 8. Eine solche Aufeinanderfolge zweier Strahlen $+s_1$ und $-s_1$ mit gemeinsamem Anfangspunkt heisst als kleinster Teil des Winkels ein „Winkelelement“.

Erkl. 9. Die Strahlen, durch deren Bewegung der Winkel entsteht, nennt man auch die erzeugenden Strahlen des Winkels.

Erkl. 10. Statt von der Anfangslage der Strahlen $+s_1$ und $-s_1$ aus nach beiden Seiten die Drehung vor sich gehen zu lassen, kann man auch berücksichtigen, dass die mit dem Vorzeichen $+$ bezeichneten Strahlen $+s_1$, $+s_2$, $+s_3 \dots$ eine Anordnung bilden, welche einen Winkel darstellt; dass desgleichen die mit den Vorzeichen $-$ bezeichneten Strahlen eine Anordnung bilden, welche ebenfalls einen Winkel darstellt.

Erkl. 11. Nach der vorigen Erkl. 10 kann man sich einen Winkel auch so entstanden denken, dass man von den zwei das ursprüngliche Winkelelement ($+s_1$, $-s_1$) bildenden Strahlen, den einen fest, den andern beweglich denkt, und den beweglichen Strahl allein nach dem in Antwort auf Frage 3 beschriebenen Vorgange durch Drehung um den gemeinsamen Anfangspunkt in irgend eine andere Lage gebracht denkt. (Siehe Antwort 1 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.) Dann heisst insbesondere der festbleibende Schenkel der Anfangsschenkel, der bewegliche der Endschenkel (s. Erkl. 2).

Antwort. Man kann sich einen Winkel folgendermassen entstanden denken:

Man denke sich zwei Strahlen $+s_1$ und $-s_1$ so an- oder nebeneinander gelegt, dass ihre Anfangspunkte in einen Punkt S zusammenfallen, und dass sonst jeder Punkt des einen Strahls mit einem Punkt des andern Strahls ein Linienelement bildet; diese beiden Strahlen denke man sich durch irgend eine Ursache so auseinander geschoben oder auseinander gedreht, dass nur ihr gemeinsamer Anfangspunkt S festgehalten bleibt, und deren innegehabten Orte durch zwei andere (unbegrenzte) Strahlen $+s_2$ und $-s_2$ in derselben Weise ausgefüllt, dass diese beiden Strahlen wieder den gleichen Anfangspunkt unter sich und mit den beiden ursprünglichen behalten; und zwar denke man sich diesen Vorgang so, dass nach demselben das neue Strahlenpaar zwischen jenen beiden ersten Strahlen liegt, und dass je zwei solche Punkte der Strahlen $+s_1$ und $-s_1$, welche vorher ein Linienelement bildeten, in Bezug auf eines der von dem neuen Strahlenpaar $+s_2$ und $-s_2$ gebildeten neuen Linienelemente entgegengesetzte Lagen haben, so zwar, dass nach jenem gedachten Vorgang je zwei solche Punkte der Strahlen $+s_1$ und $-s_1$, welche vorher ein Linienelement bildeten, mit den beiden Punkten der Strahlen $+s_2$ und $-s_2$, welche nachher in derselben Weise ein Linienelement bilden, den gleichen Abstand vom Scheitelpunkte behalten.

Denkt man sich diesen Vorgang ohne Unterbrechung fort- und fortgesetzt wiederholt, so entsteht eine ununterbrochene An- oder Nebeneinanderlagerung von Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkte, welche einen Teil der ebenen Fläche bedecken: und dieser Teil der Ebene heisst ein Winkel.

Frage 4. Zu welchen Vorstellungen gelangt man nach der in voriger Antwort auf Frage 3 und Erkl. 11 gegebenen Definition der Entstehung eines Winkels?

Antwort. Mittels der in voriger Antwort auf Frage 3 gegebenen Definition der Ent-

Erkl. 12. Wie die positiven und negativen Strahlen den Winkel in verschiedener Drehungsrichtung durchlaufen, so durchlaufen auch die Punkte dieser erzeugenden Strahlen die in 4) genannten Kreisbögen in verschiedenen einander entgegengesetzten Umlaufsrichtungen.

Erkl. 13. Die Aufeinanderfolge der Orte, welche jeder der das ursprüngliche Winkелеlement bildenden und durch irgend eine Ursache in Bewegung gesetzten Strahlen $+s_1$ und $-s_1$ nacheinander einnehmen, nennt man den Weg oder die Bahn des betreffenden Strahles.

Erkl. 14. Die Art und Weise, wie sich ein Winkel erzeugender Strahl bewegen muss, um seine Bahn zu durchlaufen, heisst die Drehungsrichtung, der Drehungssinn des Strahls. Man nennt den Drehungssinn der mit $+$ bezeichneten Strahlen den positiven, die Drehungsrichtung der mit $-$ bezeichneten Strahlen die negative Drehungsrichtung.

Erkl. 15. Um sich an Beispielen aus dem Leben die beiden entgegengesetzten Drehungsrichtungen vorzustellen, in denen ein Strahl einen Winkel erzeugen kann, benutzt man entweder die Umdrehungsrichtung der Zeiger einer Uhr (wenn man auf die Aussenfläche des Zifferblattes blickt) — oder man wählt als Vorbild die Umlaufsrichtung, in welcher ein Beobachter die Erde sich um die Sonne oder auch um sich selbst bewegen sieht, wenn er die Ebene der Erdbahn (die Ekliptik beziehungsweise die Aequatorebene) unter sich hat. Die letztere Drehungsrichtung wird allgemein als die positive bezeichnet, die entgegengesetzte als die negative. Da nun aber die Uhrzeigerbewegung in entgegengesetzter Richtung stattfindet, als der Umlauf der Erde um die Sonne, so nennt man positiv den der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Drehungssinn, und bezeichnet daher die Drehungsrichtung der Uhrzeiger als die negative.

stehung eines Winkels, sowie auf Grund der Erkl. 10 und 11, und 160 des ersten Theils, sowie der Antworten auf Fragen 50 und 51 daselbst gelangt man zu folgenden Vorstellungen:

1) Man gelangt zu der Vorstellung einer Trennung der das ursprüngliche Winkелеlement bildenden Strahlen $+s_1$ und $-s_1$ durch die das zweite Winkелеlement bildenden erzeugenden Strahlen $+s_2$ und $-s_2$.

2) Man gelangt zu der Vorstellung einer stetigen Ortsveränderung, einer sogen. Drehung der das ursprüngliche Winkелеlement bildenden Strahlen $+s_1, -s_1$; ebenso der das folgende Winkелеlement bildenden Strahlen $+s_2, -s_2$ u. s. f.

3) Man gelangt zu der Vorstellung, dass die stetige Ortsveränderung der ursprünglichen Strahlen $+s_1, -s_1$ (und ebenso der folgenden Erzeugenden $+s_2, -s_2$ u. s. f.) auch eine stetige Ortsveränderung der auf ihnen liegenden Punkte mit sich bringt.

4) Man gelangt zu der Vorstellung, dass die Linienelemente, welche von einem bestimmten Punkte eines erzeugenden Strahles mit dem ihm jeweils benachbarten Punkte des nächsten erzeugenden Strahles während dieser Ortsveränderung gebildet werden, stets den gleichen Abstand haben von dem gemeinsamen Anfangspunkte aller erzeugenden Strahlen, dass also diese Linienelemente in ihrer Gesamtheit einen Teil einer Kreislinie oder einen Kreisbogen erfüllen.

5) Man gelangt zu der Vorstellung, dass die stete Ortsveränderung oder Drehung der durch das Zeichen $+$ bezeichneten Strahlen nicht in demselben Sinne stattfindet, wie die stete Ortsveränderung der durch das Zeichen $-$ bezeichneten Strahlen, sondern gerade im sog. entgegengesetzten Sinne.

6) Man gelangt zu der Vorstellung, dass ein Winkel auch als der Weg oder die Bahn eines Strahls betrachtet werden kann, der durch irgend eine Ursache einmal in eine Drehungsbewegung um seinen Anfangspunkt gesetzt wurde.

7) Man gelangt zu der Vorstellung, dass sowohl der eine Schenkel eines Winkels als Anfangsschenkel und dabei der andere als Endschenkel betrachtet werden kann, als auch der andere Schenkel als Anfangsschenkel und hierbei der erstgenannte als Endschenkel.

8) Man gelangt zu der Vorstellung, dass je nachdem der eine bestimmte Schenkel eines Winkels als Anfangsschenkel oder aber als Endschenkel gewählt wird, dann auch

Erkl. 16. Berücksichtigt man, auf welcher Seite des umlaufenden Körpers sich der umkreiste Mittelpunkt und die umlaufene Fläche befindet, so definiert man als positiv diejenige Umdrehungsrichtung, bei welcher die umlaufene Fläche stets auf der linken Seite des sich bewegenden Körpers bleibt; hat der bewegende Körper die umlaufene Fläche auf der rechten Seite, so ist seine Umdrehungsrichtung die negative.

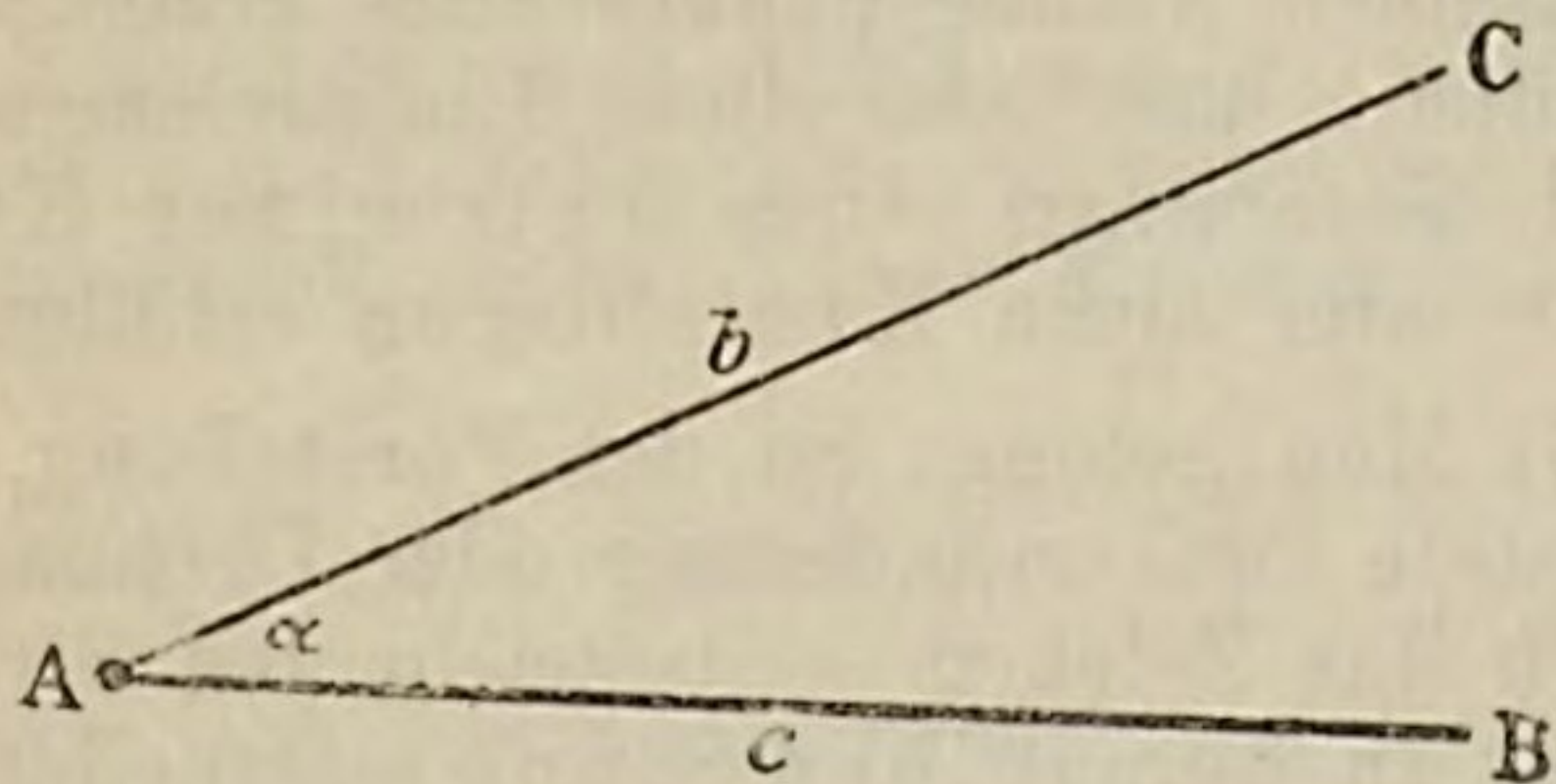
die Durchlaufungsrichtung des Winkels als eine positive oder negative bezeichnet werden muss.

9) Man gelangt zu der Vorstellung, dass jeder gedachte einzelne Punkt im Winkelraume (ausser dem Scheitelpunkt) einem erzeugenden Strahle angehört, aber auch nur einem einzigen von allen den erzeugenden Strahlen angehören kann, durch deren Aneinanderreihung der Winkel erzeugt gedacht wurde.

10) Man gelangt zu der Vorstellung, dass ein einziger, bestimmter Punkt, nämlich der Scheitelpunkt, sämtlichen erzeugenden Strahlen gemeinsam ist, dass ihre Aneinanderlagerung daher eine vollständig verschiedene ist von der Aneinanderreihung der eine Ebene erzeugenden Linien (siehe Antwort 42, 9 und Erkl. 117 des ersten Teils, sowie Erkl. 28).

Frage 5. Was kann man von einem Winkel aussagen auf Grund der im vorigen gewonnenen Vorstellungen über seine Entstehungsweise?

Figur 2.



Erkl. 17. Die Richtigkeit des Lehrsatzes 2 folgt aus Erkl. 4 und aus Erkl. 39 des ersten Teils, wonach man von den Schenkeln des Winkels, welche als nach einer Richtung hin unbegrenzte Strahlen zu denken sind, stets nur mehr oder weniger kurze Strecken zeichnen kann.

Erkl. 18. Die Grösse eines Winkels gibt die Neigung oder den sogen. Richtungsunterschied der seine Schenkel bildenden Strahlen an.

Antwort. Nach den in Antwort 4 enthaltenen Vorstellungen über die Entstehung eines Winkels kann man folgende Aussagen machen:

Lehrsatz 1. Ein Winkel ist vollkommen (eindeutig) bestimmt durch seinen Scheitel und seine beiden Schenkel — oder durch seinen Scheitel und zwei andere Punkte, durch welche die Schenkel gehen sollen (siehe Antwort 4, 7).

Lehrsatz 2. Die Grösse eines Winkels wird durchaus nicht dadurch bedingt, wie lange Stücke der seine Schenkel bildenden Strahlen gezeichnet vorliegen, sondern nur allein durch die Grösse der Drehung, welche nötig ist, um den einen Schenkel zum Zusammenfallen mit dem andern überzuführen.

Frage 6. Wie bezeichnet man einen Winkel?

Erkl. 19. Der in Fig. 2 gezeichnete Winkel mit Scheitel A

und mit den Schenkeln AB und AC

Antwort. Den Scheitel eines Winkels wie überhaupt einen einzelnen Punkt bezeichnet man mit einem grossen lateinischen Buchstaben;

einen Schenkel des Winkels wie überhaupt einen Strahl bezeichnet man entweder

oder mit den Schenkeln a und b

kann also bezeichnet werden:

1) als $\sphericalangle A$ (oder auch „Winkel bei A “)

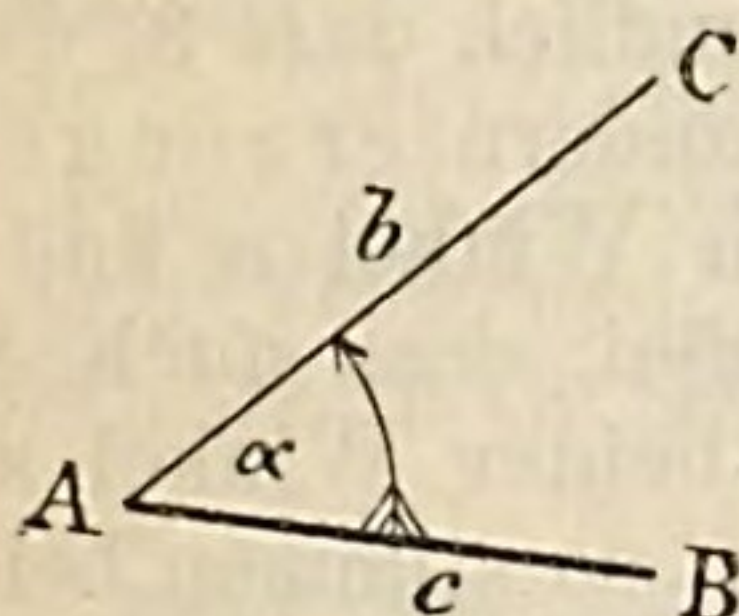
2) als $\sphericalangle \alpha$

(siehe das am Ende dieses Teils abgedruckte griechische Alphabet);

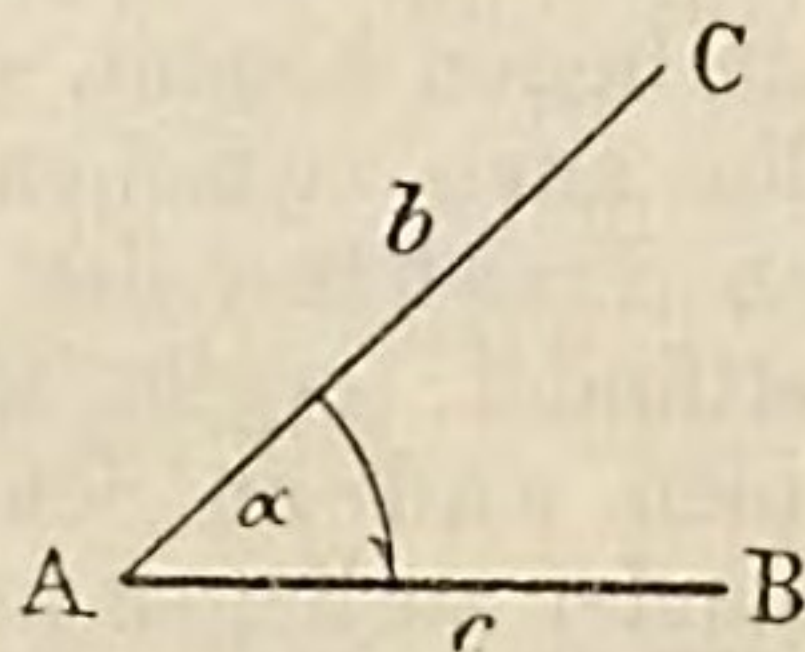
3) als $\sphericalangle (bc)$ oder (c, b)

4) als $\sphericalangle BAC$ oder $\sphericalangle CAB$

Figur 3.



Figur 4.



Erkl. 20. Für die Winkel in Figur 3 u. 4 gilt daher von den obigen Bezeichnungsweisen:

Fig. 3.

3) $\sphericalangle (cb)$

4) $\sphericalangle BAC$

Fig. 4.

3) $\sphericalangle (bc)$

4) $\sphericalangle CAB$

mit den zwei grossen Buchstaben, welche seinen Anfangspunkt und irgend einen andern auf ihm liegenden Punkt bezeichnen, oder mit einem einzigen kleinen lateinischen Buchstaben.

Den Winkel selbst kann man auf verschiedene Weise bezeichnen, nämlich:

1) Man nennt nur den grossen lateinischen Buchstaben seines Scheitels mit Vorsetzung des Zeichens $\sphericalangle =$ „Winkel“, oder:

2) Man setzt in den Winkelraum zwischen die Schenkel in möglichster Nähe zum Scheitel des Winkels einen kleinen griechischen Buchstaben, oder:

3) Man setzt die zwei kleinen lateinischen Buchstaben, durch welche die beiden Schenkel bezeichnet sind, in eine Klammer und vor dieselben das Winkelzeichen $\sphericalangle$, oder:

4) Man setzt die grossen Buchstaben, durch welche die beiden Schenkel bezeichnet sind, so aneinander, dass der den Scheitel bezeichnende Buchstaben in die Mitte einmal zu stehen kommt.

In beiden letzten Fällen (3 und 4) wird durch die Stellung der Buchstaben zugleich der Drehungssinn angegeben, in welchem man sich den Winkel entstanden denken soll (siehe Erkl. 11). In der Figur kann dies durch Einzeichnung eines kleinen Bögchens mit Pfeilspitze angedeutet werden (siehe Figur 3, 4). Dabei wird das Zeichen des als Anfangsschenkel gewählten Strahls an den Anfang gesetzt und der Strahl durch die Pfeilspitze oder auch gar nicht näher gekennzeichnet; der Buchstabe des Endschenkels dagegen wird als letzter gesetzt und durch die Pfeilspitze (eine einfache oder doppelte) auf seinen Strahl hingewiesen.

2) Ueber das Vergleichen und Messen von Winkeln.

Frage 7. Was kann man über zwei Winkel hinsichtlich der in Antwort 25 des ersten Teils definierten Einerleiheitsbegriffe aussagen?

Erkl. 21. Aus dem nebenstehenden ergibt sich:

1) Alle Winkel sind unter einander ähnlich;

2) Zwei bestimmte Winkel können:

Antwort. Ueber zwei Winkel kann man die Aussage machen:

Lehrsatz 3. Zwei Winkel stimmen in Beziehung der Arten und Weisen, wie die sie bildenden Strahlen an einander gelagert sind, also in Beziehung ihrer sogen. Formen vollkommen überein, d. h. sie sind ähnlich; in Beziehung der Mengen ihrer absoluten Einheiten, aus welchen sie bestehen, also in Beziehung ihrer absoluten Werte kann man zwei Fälle unterscheiden:

a) gleich sein, somit wegen ihrer Aehnlichkeit auch kongruent (siehe Erklärung 85 des ersten Teils);

b) ungleich, also nur ähnlich sein.

a) die Mengen der sie bildenden Strahlen (Winkelemente als absolute Einheiten), ihre absoluten Werte, stimmen vollkommen überein, d. h. die zwei Winkel sind gleich;

b) die Mengen der sie bildenden Strahlen (absoluten Winkeleinheiten) oder ihre absoluten Werte stimmen nicht vollkommen überein, d. h. sie sind verschieden oder ungleich.

Frage 8. Wie verfährt man im allgemeinen bei der Untersuchung, ob zwei Winkel kongruent oder gleich sind?

Erkl. 22. Kann man sich zwei Winkel so auf einander gelegt denken, dass der Scheitel und die beiden Schenkel des einen Winkels auf den Scheitel und die beiden Schenkel des andern Winkels zu liegen kommen, dass also auch jeder erzeugende Strahl des einen Winkels auf einen entsprechenden erzeugenden Strahl des andern, und auch jeder Punkt im Winkelraum des einen Winkels auf einen entsprechenden Punkt im Winkelraum des andern Winkels zu liegen kommt, so sagt man auch: beide Winkel decken einander.

Antwort. Um zu untersuchen, ob zwei Winkel α und β kongruent oder gleich sind (siehe Erkl. 21), denkt man sich den einen, z. B. den Winkel β so auf den andern, den Winkel α gelegt, dass 1) der **Scheitel** des Winkels β genau auf den Scheitel des Winkels α , und dass 2) der eine Schenkel des Winkels β in seiner ganzen Erstreckung auf den einen der Schenkel des Winkels α zu liegen kommt, sowie endlich dass 3) dasselbe auch zwischen den andern erzeugenden Strahlen der beiden Winkel α und β stattfindet: ergibt sich dabei, dass auch die beiden andern Schenkel beider Winkel auf einander zu liegen kommen, so stimmen beide Winkel in Bezug auf die Mengen der sie bildenden Strahlen (Winkelemente) überein, d. h. sie sind nach Erkl. 21 einander gleich und somit auch kongruent (siehe auch Erkl. 23).

Frage 9. Was kann man in Bezug auf die Kongruenz zweier Winkel aussagen?

Erkl. 23. Auch hier dient es vorzüglich zur Unterstützung der Vorstellung, wenn man den einen Winkel, z. B. den Winkel β , oder auch beide Winkel mit der Schere aus dem Papier ausschneidet und die erhaltenen Papierausschnitte auf einander legt. Kongruente Winkel erhält man am leichtesten, wenn man mehrfach auf einander gelegte Papierblätter gleichzeitig ausschneidet.

Antwort. In Bezug auf die Kongruenz zweier Winkel kann man die Aussage machen:

Lehrsatz 4. Zwei (oder mehrere) Winkel sind kongruent (damit auch gleich, siehe Erkl. 21), wenn man sie so auf einander gelegt denken kann, dass sie sich decken, d. h. dass sowohl der Scheitel als auch beide Schenkel des einen Winkels auf den Scheitel und die beiden Schenkel des andern Winkels zu liegen kommen (siehe Erkl. 22).

Frage 10. Was versteht man unter dem Messen eines Winkels?

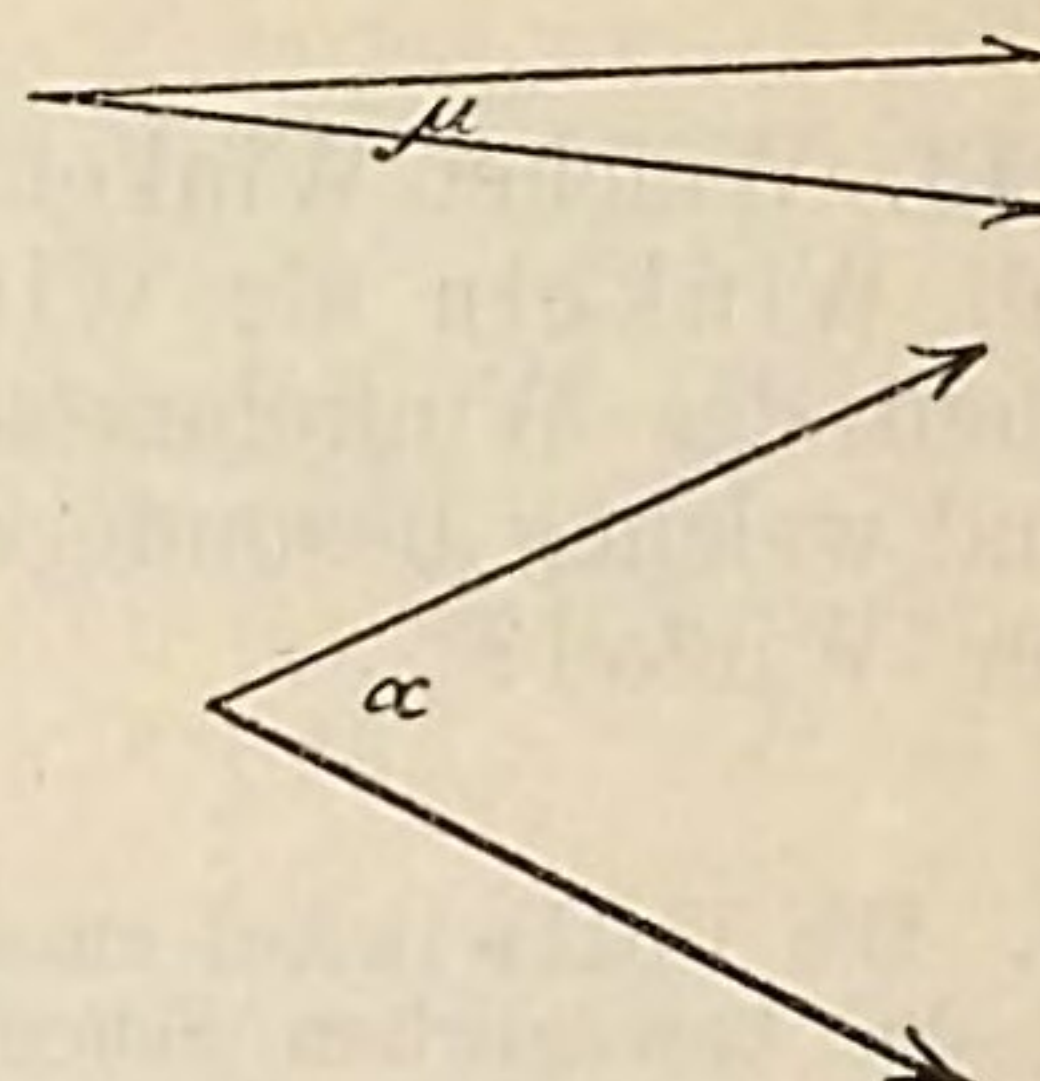
Erkl. 24. Zu dem Messen eines Winkels bedient man sich im allgemeinen eines sogen. **Winkelmessers**, das ist eines Stückes irgend eines Materials, auf welchem der als **Masseinheit** benützte Einheitswinkel einmal oder noch besser beliebig oft aufgetragen ist (s. Erkl. 31).

Antwort. Unter dem Messen eines Winkels α (siehe Fig. 5) versteht man die Bestimmung derjenigen Zahl z , „**Masszahl**“ genannt, welche angibt, wie viel mal ein im allgemeinen beliebig gewählter Winkel μ , die sogen. **Masseinheit**, in jenem Winkel α enthalten ist.

Erkl. 25. Um mit dem Winkel μ (siehe Fig. 5) den Winkel α zu messen, legt man denselben so auf den Winkel α , dass der Scheitel und einer der Schenkel des Winkels μ auf den Scheitel und einen der Schenkel des Winkels α zu liegen kommt; hierauf wird im Winkelraum des Winkels α derjenige erzeugende Strahl markiert, auf welchem sich der andere Schenkel des Winkels μ befindet. Alsdann legt man den Winkelmesser μ in derselben Weise auf den Winkel α , dass jetzt der eine Schenkel desselben auf jenen markierten erzeugenden Strahl des Winkels α zu liegen kommt, u. s. f.

Die Zahl, welche angibt, wie viel mal oder wie oft mal dieses Aufeinanderlegen des Winkelmasses auf einen zu messenden Winkel erforderlich ist, damit bei dem letzten Auflegen des Winkelmessers μ dessen Endschenkel auf den Endschenkel des Winkels α fällt, ist die gesuchte Masszahl des zu messenden Winkels α . Fällt bei dem letzten Auflegen des Masses dessen einer Schenkel nicht auf den Endschenkel des zu messenden Winkels (was in den meisten Fällen stattfinden wird), so muss man mit einem kleineren Winkel als Masseinheit messen (siehe Erkl. 32).

Figur 5.



Frage 11. Was versteht man unter der Grösse eines Winkels?

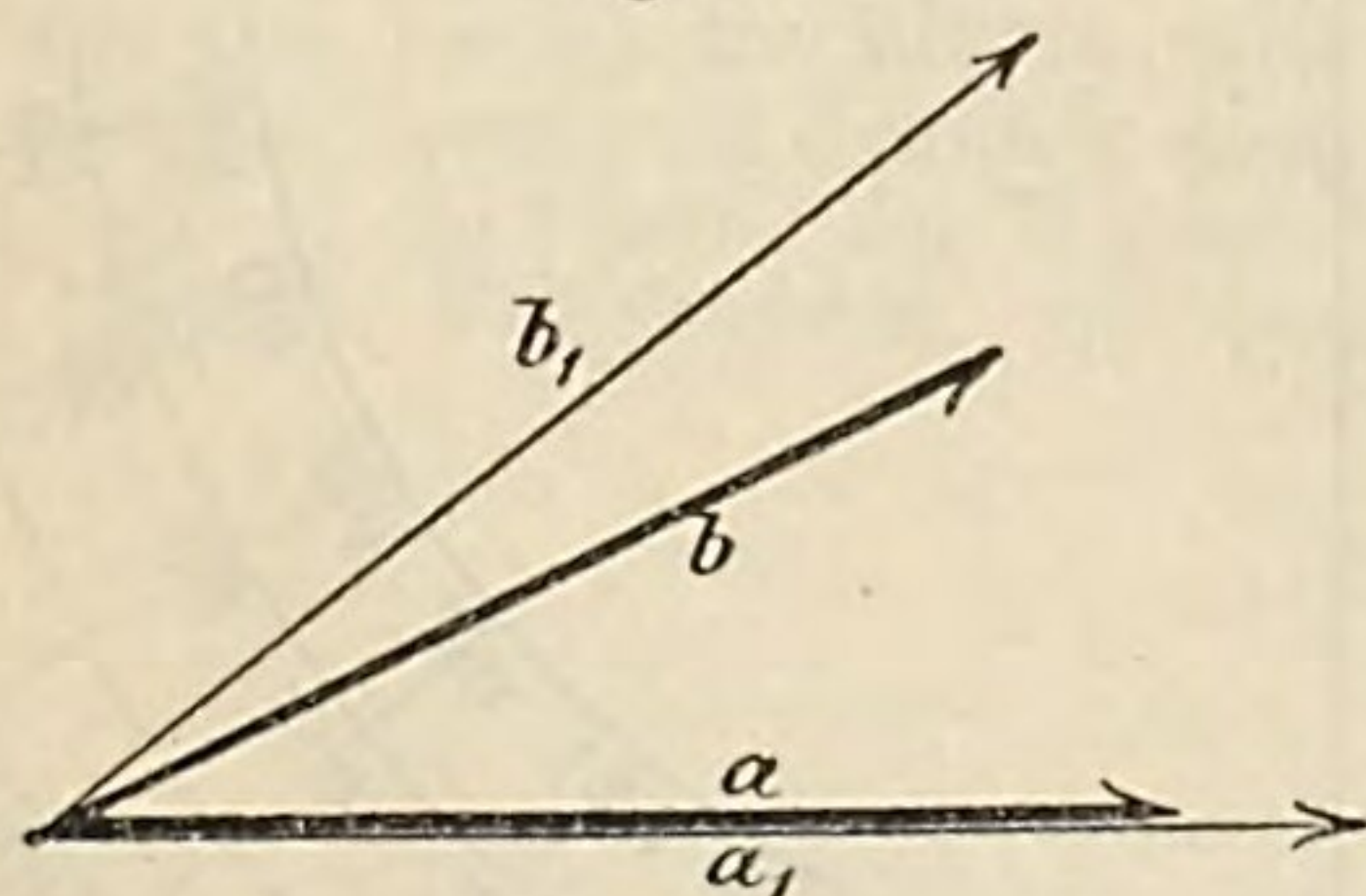
Erkl. 26. Die Grösse eines Winkels wird auch seine „Winkelöffnung“ genannt (siehe Erkl. 18 und Lehrsatz 2).

Die Masseinheit, in welcher die Grösse oder die Winkelöffnung eines Winkels ausgedrückt ist, wird dementsprechend auch Winkelmasseinheit, Winkелеinheit genannt.

Antwort. Unter der Grösse eines Winkels versteht man die Angabe der Anzahl derjenigen Masseinheiten, welche sich beim Messen eines Winkels ergeben.

Frage 12. Wann sagt man, ein Winkel ist grösser oder kleiner als ein anderer Winkel?

Figur 6.



Antwort. Liegen (siehe Figur 6) zwei Winkel (ab) und (a_1b_1) so aufeinander, dass z. B. die Anfangsschenkel a und a_1 aufeinander liegen und der Endschenkel b des Winkels (ab) auf einem der erzeugenden Strahlen des Winkels (a_1b_1) liegt, bzw. dass der Endschenkel b_1 des Winkels (a_1b_1) auf einem ausserhalb des Winkelraumes (ab) befindlichen Strahl durch den Scheitel zu liegen kommt, so sagt man, der Winkel (ab) sei kleiner als der Winkel (a_1b_1) , oder der Winkel (a_1b_1) ist grösser als der Winkel (ab) .

Erkl. 27. Nach den Antworten auf die Fragen 11 und 12 ist ein Winkel α grösser oder kleiner als ein anderer Winkel β , je nachdem die auf eine bestimmte Winkelmasseinheit sich beziehende Masszahl des Winkels α grösser oder kleiner als die auf dieselbe Winkelmasseinheit bezogene Masszahl des Winkels β ist.

Erkl. 28. Auch Winkel heissen commensurabel oder incommensurabel (s. Erkl. 100 des ersten Teils), wenn sich beim Messen derselben durch ein und dieselbe Winkelmasseinheit ergibt, dass sich die Winkelöffnungen beider Winkel in ganzen Masszahlen ausdrücken lassen, bzw. wenn dies nicht der Fall ist.

Frage 13. Welcher Winkel wird zum Messen von Winkeln als Winkeleinheit (Einheit des Winkelmasses) angenommen und welchen besonderen Namen führt dieser Winkel?

Erkl. 29. Ein Vollwinkel entsteht, wenn die Drehung des beweglichen Schenkels (siehe Erkl. 11) solange fortgesetzt wird, bis er wieder in die ursprüngliche Lage des festen Schenkels gelangt.

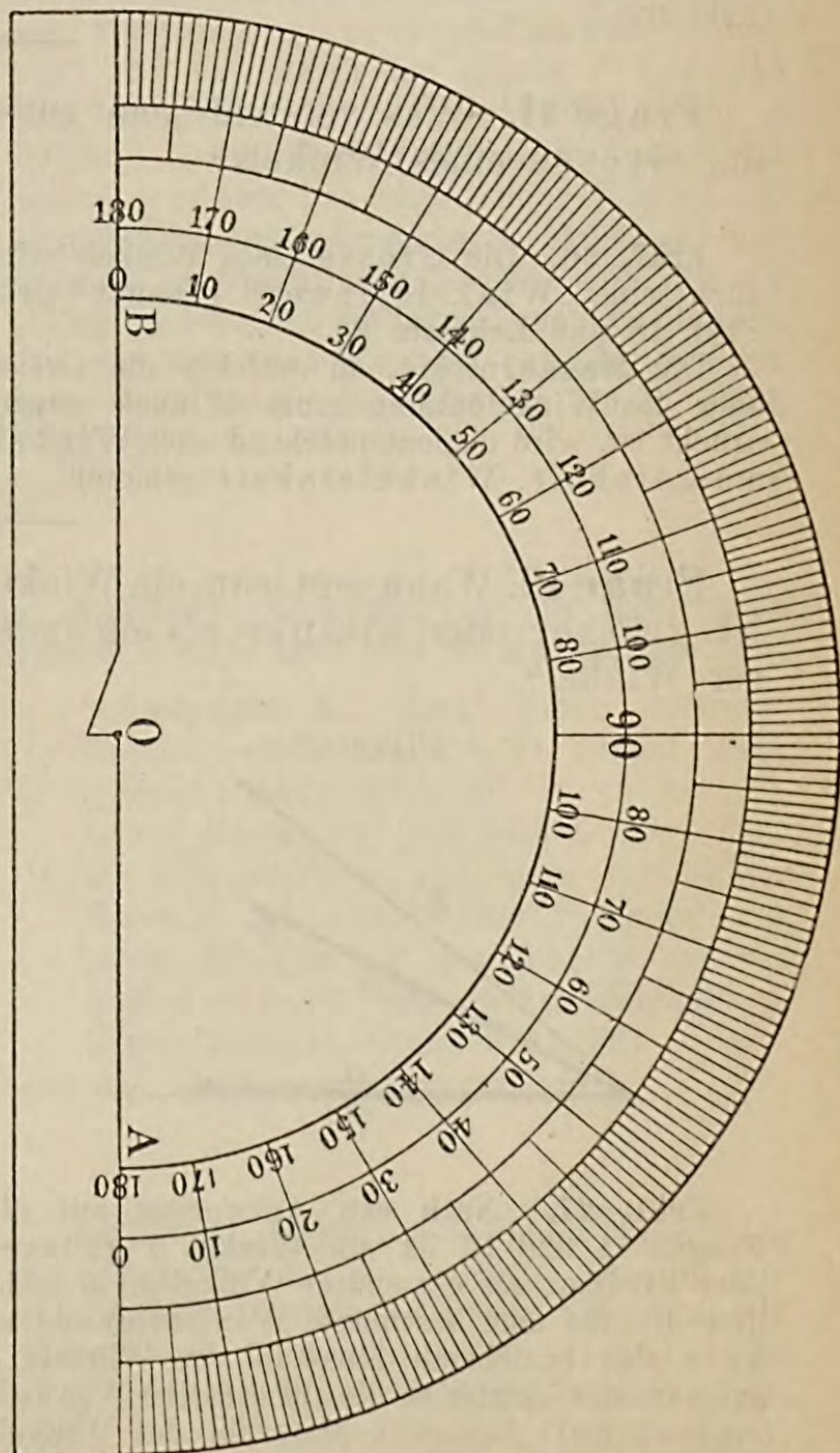
Erkl. 30. Zum Messen eines Winkels könnte man jeden beliebigen Winkel als Winkeleinheit oder als Mass wählen; die Wahl des in Antwort auf Frage 13 definierten Masses rührt schon von den alten Babyloniern her. Diese vermeinten, die Sonne brauche zum vollen Jahresumlauf um die Erde gerade 360 Tage, so dass also ein Grad dem scheinbaren Fortschritt (gradus, lat. = Schritt) der Sonne am Himmel während eines Tages entspräche. (Erst in neuester Zeit und besonders in technischen Fächern wird manchmal der 400. Teil des Vollwinkels als Masseinheit benutzt und alsdann ebenfalls mit dem Namen „Grad“ bezeichnet.)

Erkl. 31. Da es zu unpraktisch wäre, einen Winkel mit dem Winkelmesser von einem Grad Winkelöffnung nach der in Erkl. 25 angegebenen Weise zu messen, so ist der Winkelmesser, s. Figur 7, folgendermassen eingerichtet: Auf einem Stück von Metall oder Papier oder Holz, von durchsichtigem Horn oder von irgend einem ähnlichen Stoff sind eine grosse Anzahl — meist 180 — Grade mit ihren Schenkeln aufgezeichnet und zwar in der Weise, dass alle einen gemeinsamen Scheitel haben und dass immer der Endschenkel des einen zugleich Anfangsschenkel des andern ist. Dieser Winkelmesser wird dann nach der in Antwort auf Frage 12 erklärten Weise auf den zu messenden Winkel aufgelegt und es wird abgelesen, der wievielte der aufgezeichneten Winkelschenkel mit dem Endschenkel des zu messenden Winkels zusammenfällt.

Erkl. 32. Bei dem Messen eines Winkels mit dem Winkelmesser wird meistens der Fall eintreten, dass der Winkel von einem Grad nicht genau in dem zu messenden Winkel enthalten ist, dass also noch ein Teil des zu messenden Winkels übrig bleibt, welcher kleiner als ein Grad ist.

Antwort. Beim Messen von Winkeln wird als Masseinheit (Winkelmasseinheit, Winkeleinheit) derjenige Winkel oder diejenige Drehungsgrösse angenommen, welche gleich ist dem dreihundertsechzigsten Teil einer ganzen Umdrehung oder eines Vollwinkels; dieser Winkel führt als Winkelmasseinheit den besonderen Namen „der Grad“ (s. Erkl. 30).

Figur 7.



Um solche Winkel zu messen, welche kleiner als ein Grad sind, die also mit dem Winkelmesser von einem Grad nicht direkt gemessen werden können, bedient man sich als Winkelmasseinheit bestimmter Bruchteile eines Grades und untersucht, wie oft diese kleine Winkleinheit in dem übrigbleibenden Reste des zu messenden Winkels enthalten ist.

Diese Teile eines Winkelgrades werden dadurch festgestellt, dass man den Grad in 60 gleiche Teile teilt, von welchen jeder Teil den Namen „Minute“ (s. Erkl. 34), jeden dieser Teile wieder in 60 gleiche Teile teilt, von welchen jeder den Namen „Sekunde“ führt, und jeden der letzteren abermals in 60 gleiche Teile teilt, von welchen jeder den Namen „Terze“ führt, und so fort zu Quarten, Quinten....

Doch werden oft auch kleinere Winkel als ein Grad nach Dezimalbruchteilen des Winkelgrades angegeben und für Winkel unterhalb der Grösse einer Sekunde ist die Messung nach Dezimalteilen der Sekunde so sehr üblich, dass Terzen und kleinere Masseinheiten kaum praktische Anwendung finden.

Erkl. 33. Die durch Messung gefundene Grösse eines Winkels wird wie folgt bezeichnet:

a) hat man gefunden, dass bei dem Messen eines Winkels α der Winkelgrad z. B. genau 37mal in demselben enthalten ist, so sagt man: der Winkel ist 37 Grad gross, und bezeichnet dies durch

$$\text{oder: } \sphericalangle \alpha = 37 \text{ Grad} \\ \sphericalangle \alpha = 37^{\circ}$$

b) hat man gefunden, dass bei dem Messen eines Winkels α der Winkelgrad z. B. genau 81mal und (im Reste) die Minute noch genau 54mal enthalten ist, so sagt man: der Winkel ist 81 Grad 54 Minuten gross, und bezeichnet dies durch

$$\text{oder: } \sphericalangle \alpha = 81 \text{ Grad } 54 \text{ Minuten} \\ \sphericalangle \alpha = 81^{\circ} 54' \\ \text{oder: } \sphericalangle \alpha = 81 \frac{54}{60}^{\circ} = 81,9^{\circ} \\ \text{oder: } \sphericalangle \alpha = 81 \cdot 60 + 54' = 4914'$$

c) hat man gefunden, dass bei dem Messen eines Winkels α der Winkelgrad z. B. genau 125mal und (im Reste) die Minute noch 46mal und (im übrigen Reste) die Sekunde noch 30mal enthalten sei, so sagt man: der Winkel hat 125 Grad 46 Minuten 30 Sekunden, und bezeichnet dies durch

$$\text{oder: } \sphericalangle \alpha = 125 \text{ Grad } 46 \text{ Minuten } 30 \text{ Sekunden} \\ \text{oder: } \sphericalangle \alpha = 125^{\circ} 46' 30'' \\ \text{oder: } \sphericalangle \alpha = 125^{\circ} 46,5' \\ \text{oder: } \sphericalangle \alpha = 125 \frac{46,5}{60}^{\circ} = 125,775^{\circ} \\ \text{oder: } \sphericalangle \alpha = 7546,5' = 452790''$$

d) hat man gefunden, dass bei dem Messen eines Winkels α der Winkelgrad z. B. gar nicht und die Minute z. B. genau 48mal in demselben enthalten ist, so sagt man: der Winkel ist 48 Minuten gross, und bezeichnet dies durch . . .

$$\text{oder: } \sphericalangle \alpha = 48 \text{ Minuten} \\ \sphericalangle \alpha = 48' \\ \text{oder: } \sphericalangle \alpha = \frac{48}{60}^{\circ} = 0,8^{\circ} \\ \text{oder: } \sphericalangle \alpha = 48 \cdot 60'' = 2880''$$

e) hat man gefunden, dass bei dem Messen eines Winkels α der Winkelgrad z. B. gar nicht, die Minute gleichfalls nicht, die Sekunde z. B. genau 36mal in demselben enthalten ist, so sagt man: der Winkel ist 36 Sekunden gross, und bezeichnet dies durch

$$\angle \alpha = 36 \text{ Sekunden}$$

$$\text{oder: } \angle \alpha = 36''$$

$$\text{oder: } \angle \alpha = \frac{36}{60}' = 0,6'$$

$$\text{oder: } \angle \alpha = \frac{0,6^0}{60} = 0,01^0$$

f) hat man gefunden, dass bei dem Messen eines Winkels α der Winkelgrad z. B. genau 57mal und im Reste die Minute gar nicht, die Sekunde 27mal enthalten ist, so sagt man: der Winkel α hat 57 Grad und 27 Sekunden, und bezeichnet dies durch

$$\angle \alpha = 57 \text{ Grad } 27 \text{ Sekunden}$$

$$\text{oder: } \angle \alpha = 57^0 27''$$

$$\text{oder: } \angle \alpha = 57 \cdot 3600 + 27'' = 205227''$$

$$\text{oder: } \angle \alpha = 57 \frac{27}{3600}^0 = 57,0075^0$$

$$\text{oder: } \angle \alpha + 57 \cdot 60 + \frac{27}{60}' = 3420,45'$$

g) ähnlich wäre die Bezeichnung eines Winkels, dessen Mass auch noch in Terzen, Quarten angegeben wäre, folgende

$$\angle \alpha = 126 \text{ Grad } 27 \text{ Minuten } 38 \text{ Sekunden } 49 \text{ Terzen } 10 \text{ Quarten}$$

$$\text{oder: } \angle \alpha = 126^0 27' 38'' 49^{\text{III}} 10^{\text{IV}}$$

u. s. w. Vergl. Erkl. 34, 35 und die Aufgaben 1 u. ff. am Schlusse dieses Teiles.

Erkl. 34. Mit den Worten Minute, Sekunde, Terze u. s. f. bezeichnet man die Sexagesimalteile eines Grades. Die Namen entstammen den lateinischen Ausdrücken für die „verkleinerten Teile erster, zweiter, dritter u. s. w. Ordnung“ (partes minutae primae, secundae, tertiae u. s. w.) Ihre Anwendung stammt dagegen wie die Teilung in 360 Grade schon von den alten Babyloniern, von welchen sich die Rechnung nach 60teiligem Zahlensystem bei manchen Massen bis in die neueste Zeit erhalten hat (1 Gulden = 60 Kreuzer).

Der Entstehungsweise der Namen entspricht auch die abgekürzte Bezeichnung für die Bruchteile des Winkels durch römische (Ordnungs) Zahlen. Es wird nämlich bezeichnet:

der Grad durch . . . 0

die Minute durch . . . I oder: '

die Sekunde durch . . . II oder: ''

die Terze durch . . . III oder: '''

u. s. w.

Erkl. 35. Nachstehendes Schema enthält eine Zusammenstellung der einzelnen Bruchteile des Winkelmasses:

1^0	=	$60'$	=	$3600''$	=	$216000'''$
$\frac{1}{60}^0 = 0,01666^0 \dots$	=	$1'$	=	$60''$	=	$3600'''$
$\frac{1}{3600}^0 = 0,0002777^0 \dots$	=	$\frac{1}{60}' = 0,1666' \dots$	=	$1''$	=	$60'''$
$\frac{1}{216000}^0 = 0,000004629629^0 \dots$	=	$\frac{1}{3600}' = 0,0002777' \dots$	=	$\frac{1}{60}'' = 0,01666'' \dots$	=	$1'''$

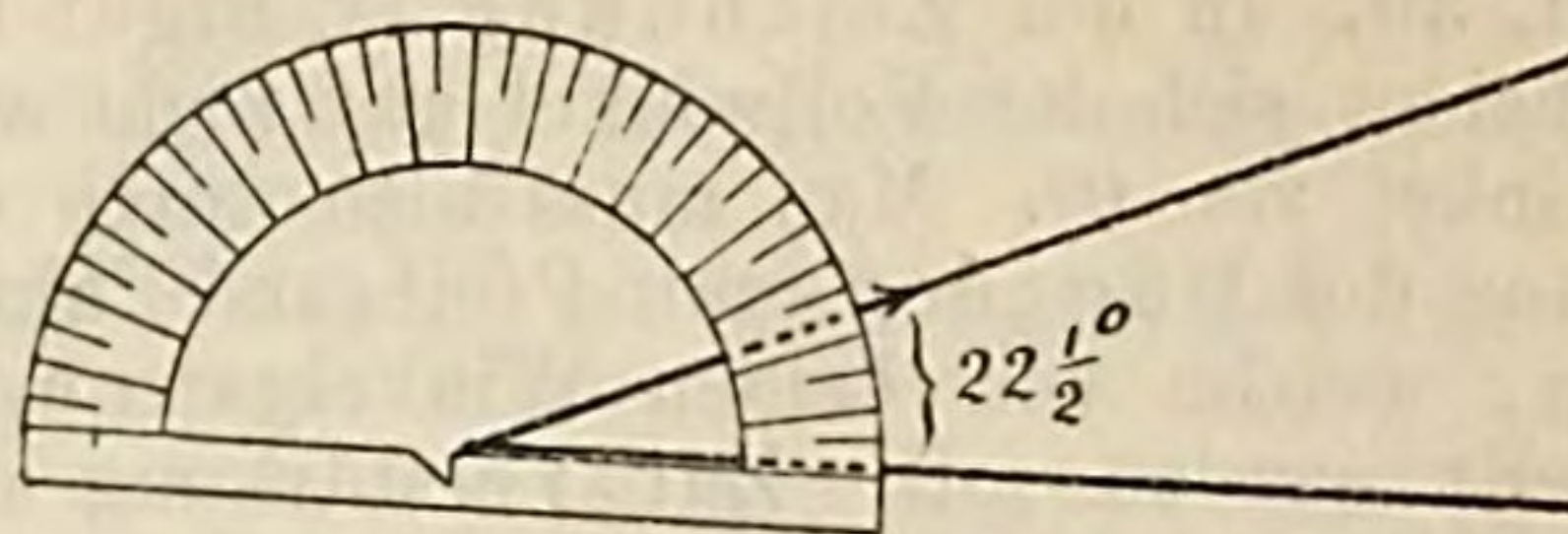
Erkl. 36. Der durch Figur 7 dargestellte Massstab stellt einen Winkelmesser dar, auf welchem 180 einzelne Grade aufgetragen sind. Zur Benützung desselben nach Antwort auf Frage 12 wird der gemeinsame Scheitel O aller auf den Winkelmesser gezeichneten Winkel auf den Scheitel des zu messenden Winkels gelegt, der Anfangsschenkel OA oder OB auf den Anfangsschenkel desselben, und die Ordnungszahl desjenigen Schenkels abgelesen, bei welchem der Endschenkel des zu messenden Winkels unter dem aufgelegten Winkelmesser hervorragt. Ist der Endschenkel des zu messenden Winkels nicht eine genügend lange Strecke gezeichnet, so muss derselbe erst soweit verlängert werden, dass er über den Winkelmesser hervorragt. Da auf dem Winkelmesser zwei Zählungen angeschrieben sind, so hat man darauf zu achten, dass man auch richtig diejenige Zahlenfolge abliest, deren Nullziffer auf dem Anfangsschenkel steht.

Erkl. 37. In den Figuren 8 bis 12 ist für einige Grössen und Lagen von Winkeln angedeutet, wie der Winkelmesser aufzulegen ist. Um noch kleinere Bruchteile der Winkel genau zu messen, wird auch für den Winkelmesser der Grundsatz der Verjüngung angewendet, wie solches in Erkl. 110 des ersten Teils für den Längenmassstab angedeutet und in dem Teile VI dieses Lehrbuches, welcher über Aehnlichkeit handelt, genauer ausgeführt ist. Anwendung dieses verjüngten Massstabes auf den Winkelmesser findet man bei feineren Messinstrumenten der technischen Wissenschaften (Theodolith u.s.w.)

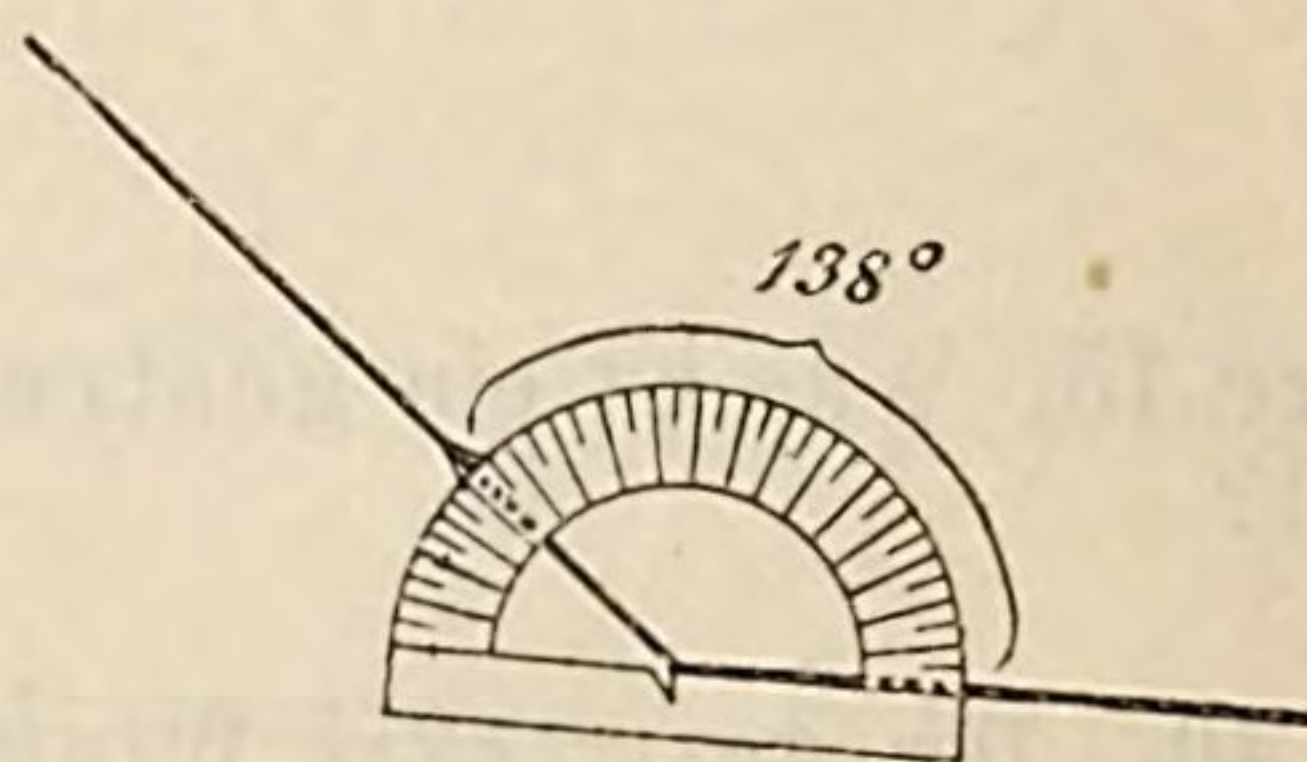
Figur 12.



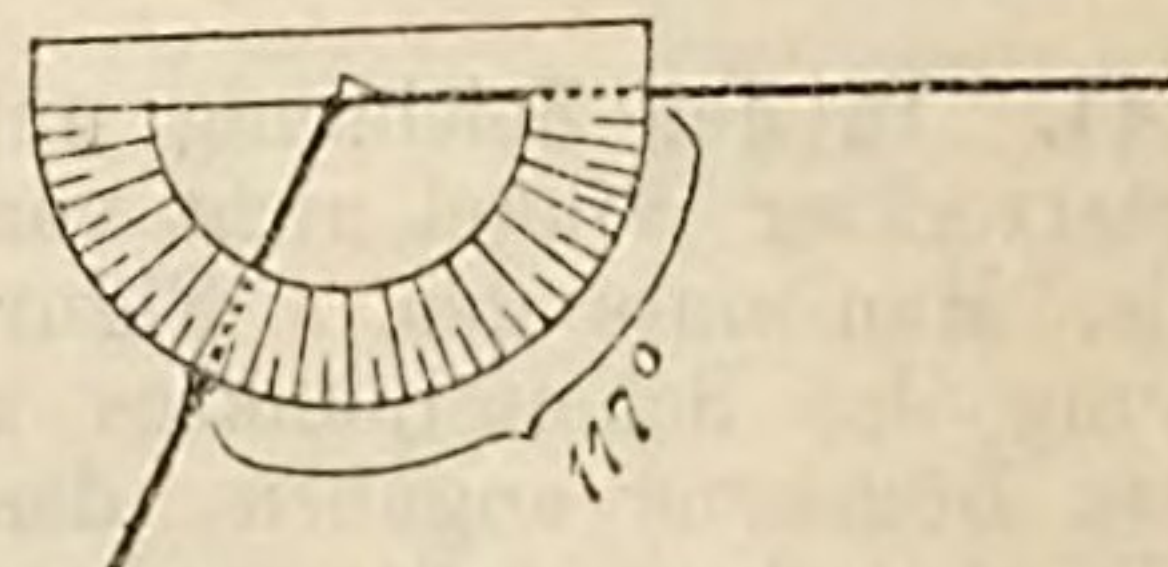
Figur 8.



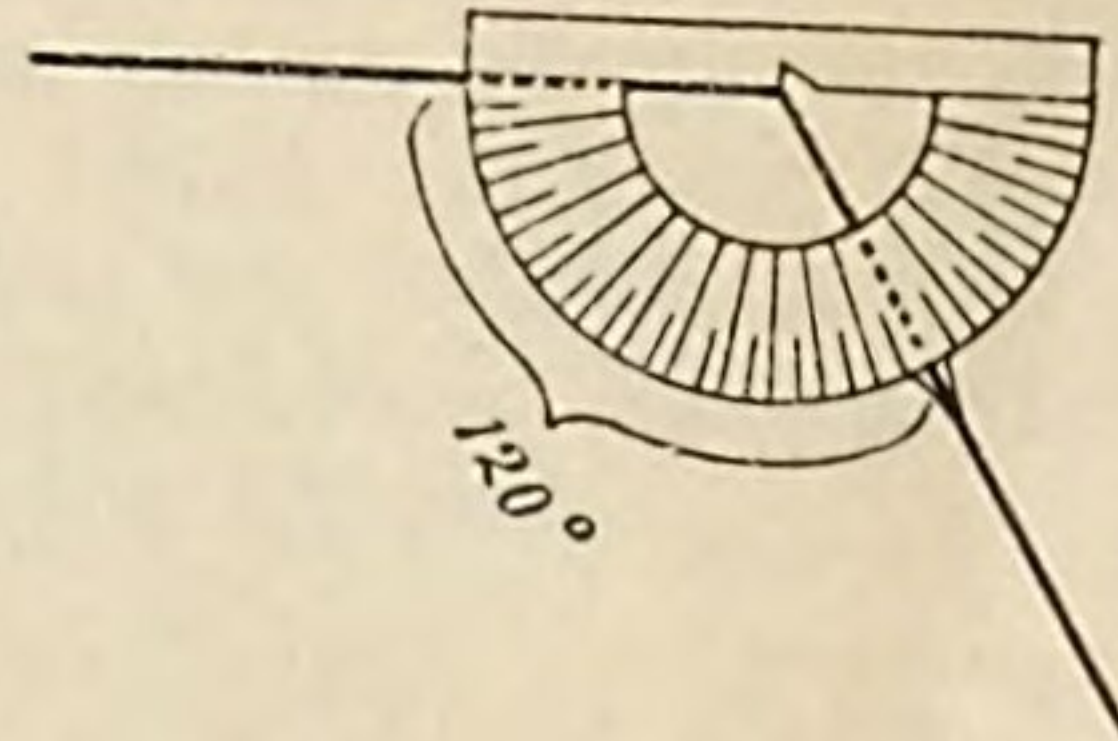
Figur 9.



Figur 10.



Figur 11.



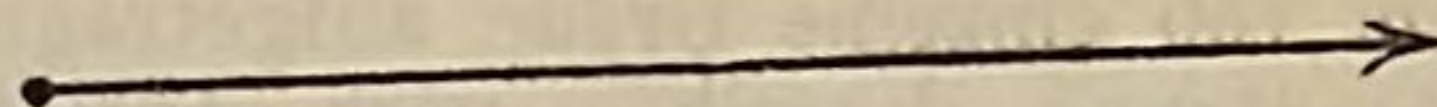
3) Ueber die Arten der Winkel bezüglich ihrer Grösse.

Frage 14. Was ist ein Vollwinkel?

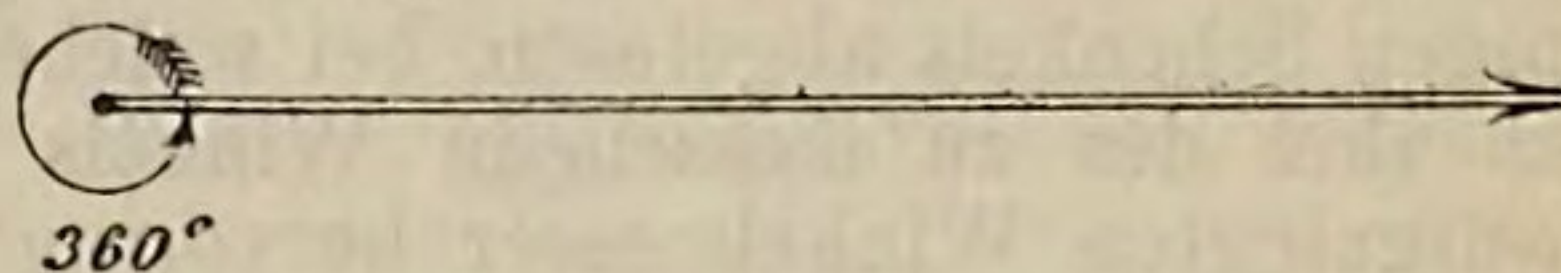
Erkl. 38. Der Vollwinkel umfasst die ganze Ebene, aber entstanden als Gebilde aller der von einem Punkte ausgehenden Strahlen, statt wie in Antwort auf Frage 41 des ersten Teils als Gebilde aller Parallelen zu einer gegebenen Richtung, siehe Antwort 10 auf Frage 4. Jeder Punkt einer Ebene ist Scheitel eines Vollwinkels.

Antwort. Ein Vollwinkel oder ein voller Winkel ist ein Winkel, der entsteht, wenn die Drehung des beweglichen Winkelschenkels soweit geführt wird, dass derselbe eine ganze oder eine volle Umdrehung macht, dass also der Endschenkel wieder mit dem Anfangsschenkel zusammenfällt. Ein Vollwinkel hat 360° .

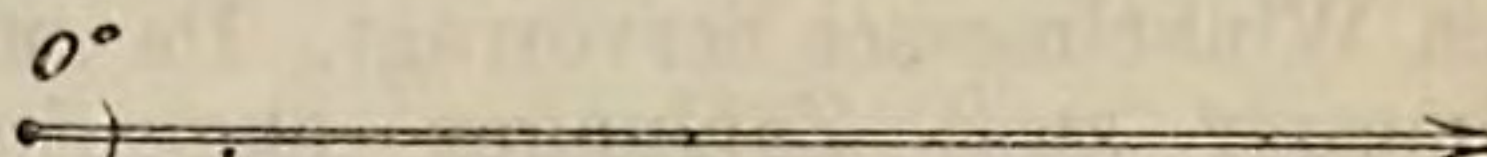
Figur 13.



Figur 14.



Figur 15.



Erkl. 39. In der Zeichnung (s. Figur 13) unterscheidet sich der Vollwinkel gar nicht von dem Winkel von 0° . Man muss also durch die Beifügung des Bögchens mit Pfeil (und Fahne) angeben, welche von beiden Winkelgattungen dargestellt werden soll. Zur Verstärkung der Deutlichkeit kann der Schenkel auch als Doppel- linie gezeichnet werden (s. Figur 14 und 15).

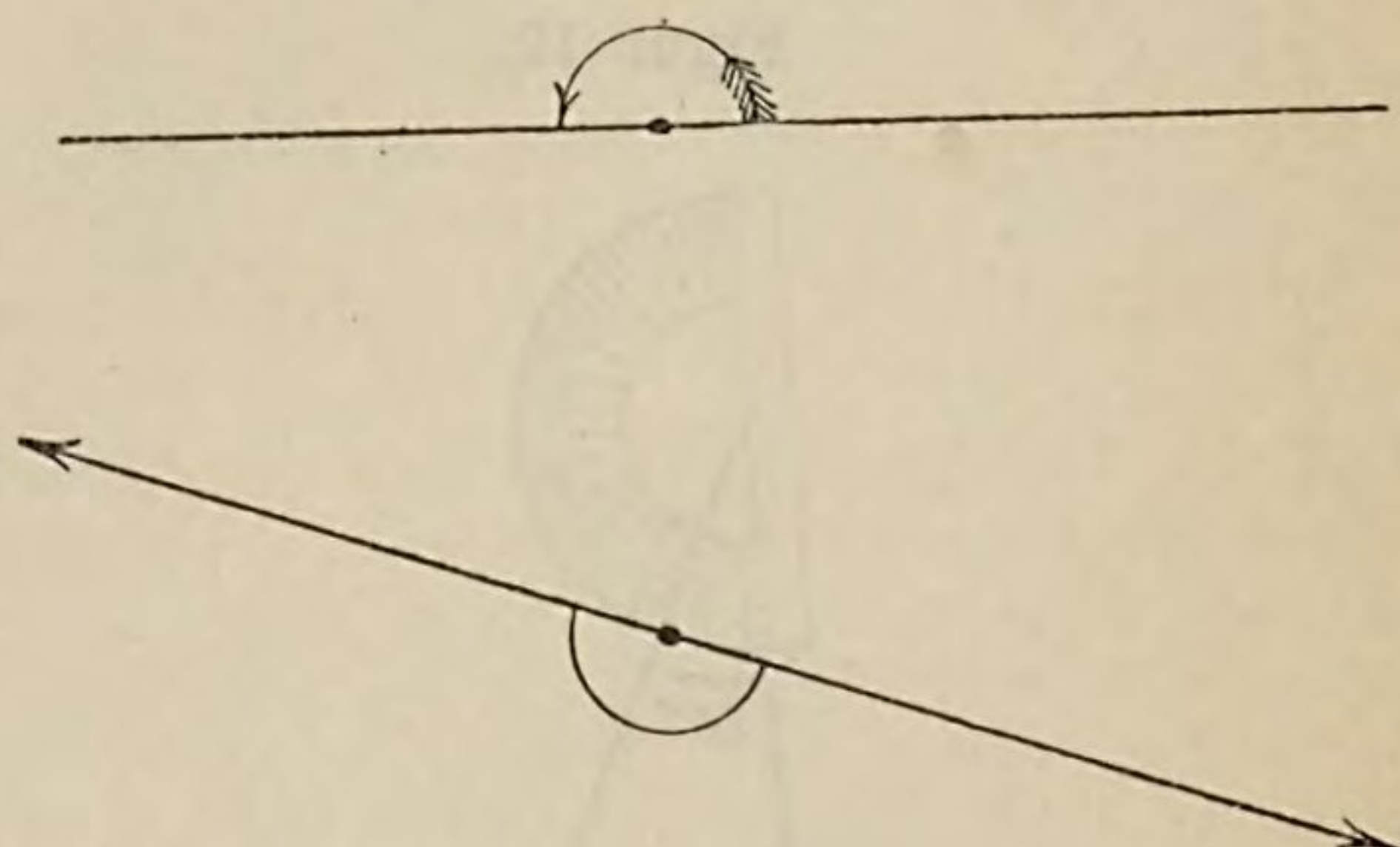
Frage 15. Was ist ein gestreckter Winkel?

Erkl. 40. Der gestreckte Winkel umfasst eine Halbebene, da seine Schenkel eine gerade Linie bilden. Jede Gerade einer Ebene bildet auf jeder ihrer beiden Seiten einen gestreckten Winkel, dessen Scheitel jeder beliebige Punkt der Geraden sein kann.

Erkl. 41. In der Zeichnung unterscheidet sich ein gestreckter Winkel nicht von einer geraden Linie. Man muss also, s. Figur 16, durch Auszeichnung des Scheitelpunktes nebst Beifügung des Bögchens angeben, dass ein gestreckter Winkel dargestellt werden soll. Zur Erhöhung der Deutlichkeit dient auch die Zufügung von Pfeilen an die (entgegengesetzten) Richtungen des Anfangs- und Endschenkels.

Antwort. Ein gestreckter Winkel oder ein flacher Winkel ist ein Winkel, der entsteht, wenn die Drehung des beweglichen Schenkels soweit geführt wird, dass derselbe eine halbe Umdrehung macht, dass also der Endschenkel mit der Verlängerung des Anfangsschenkels zusammenfällt. Ein gestreckter Winkel ist die Hälfte eines Vollwinkels und beträgt 180° .

Figur 16.



Frage 16. Was ist ein rechter Winkel?

Erkl. 42. Kein Winkel kommt im praktischen Leben (Handwerk, Baukunst u. s. w.) so häufig vor, wie der Rechte. Dem entsprechend sind für die Beziehung zweier Strahlen, welche einen rechten Winkel einschliessen, auch eine ganze Menge von Benennungen im Gebrauch, von denen hier einige der häufigsten angeführt sein mögen:

Man sagt von einem Strahl a , welcher mit einem Strahl b einen rechten Winkel bildet: . . .

Antwort. Ein rechter Winkel, auch kurzweg „ein Rechter“ genannt, ist ein Winkel, der entsteht, wenn die Drehung des beweglichen Schenkels soweit geführt wird, dass derselbe eine Viertelumdrehung macht. Ein rechter Winkel ist der vierte Teil eines Vollwinkels, oder die Hälfte eines gestreckten Winkels oder gleich 90° .

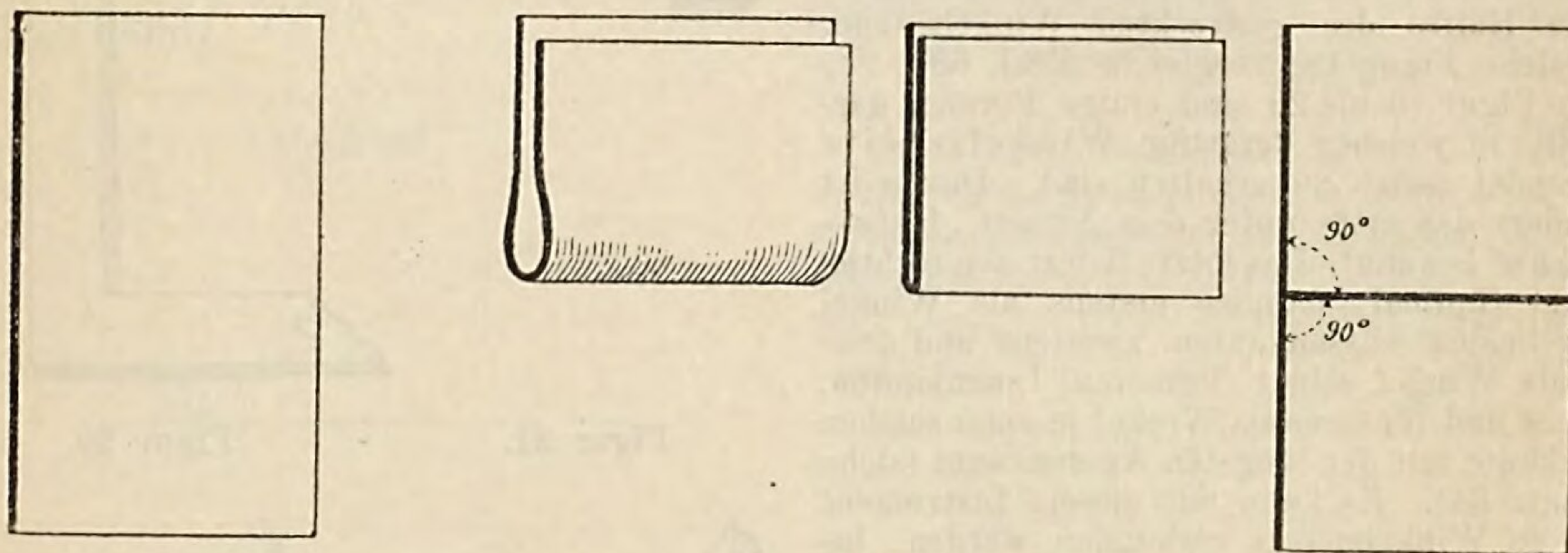
. . . Strahl a ist rechtwinklig zu Strahl b oder: Strahl a steht rechtwinklig auf Strahl b

In Schriftzeichen wird das nebenstehend ausgesprochene angegeben durch das Zeichen $\perp$, also $a \perp b$.

- oder: Strahl a ist (steht) senkrecht (zu) auf Strahl b
- oder: Strahl a ist (steht) winkelrecht zu (auf) Strahl b
- oder: Strahl a ist (steht) lotrecht zu (auf) Strahl b
- oder: Strahl a ist (steht) normal zu (auf) Strahl b
- oder: Strahl a ist (steht) perpendikulär zu (auf) Strahl b
- oder: Strahl a ist die Senkrechte (Linie) zu Strahl b
- oder: Strahl a ist das Lot oder die Lotrechte oder die Winkelrechte oder die Normale oder das Perpendikel zu Strahl b .

Erkl. 43. Bei derjenigen Winkelteilung (s. Erkl. 30), welche den Vollwinkel in 400 Grade teilt, hat der rechte Winkel 100° . Die Grade werden nicht mehr in Bruchteile mit anderen Namen zerlegt, sondern man rechnet nur mit Dezimalbruchteilen dieser Grade.

Figur 17.



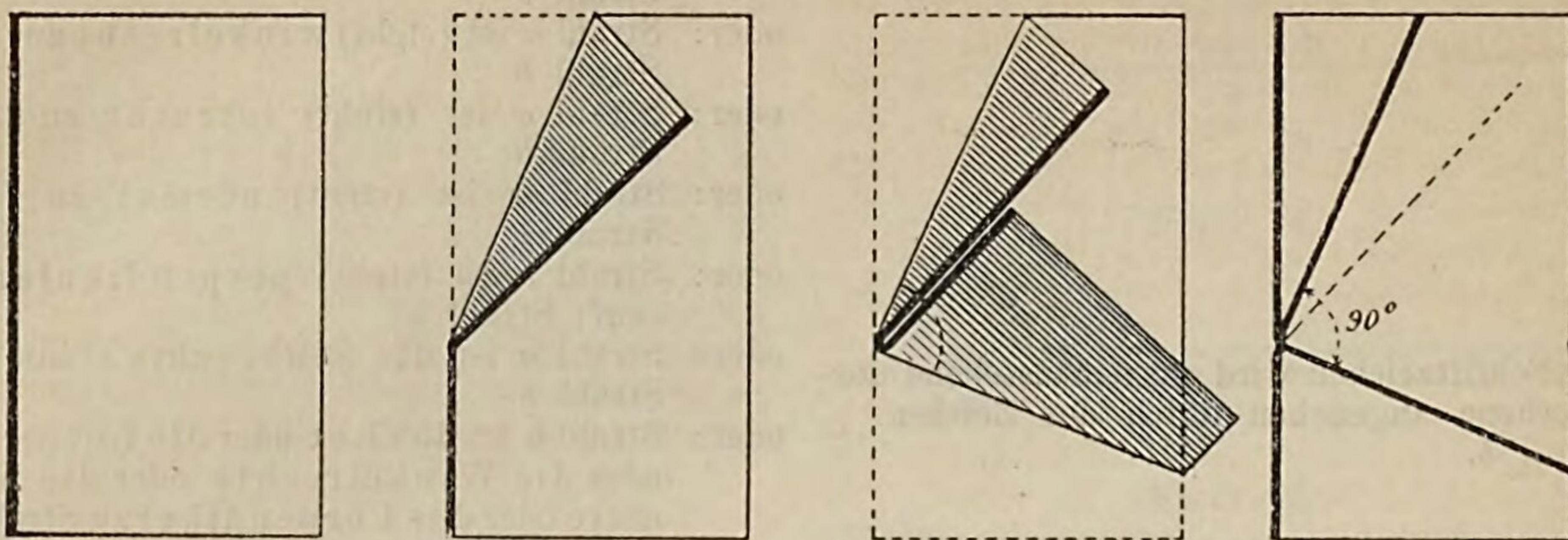
Frage 17. Was ist ein Winkelscheit?

Erkl. 44. Man kann sich auf verschiedene Weise aus Papier ein Winkelscheit zurecht machen. Gibt man z. B. einem Blatt Papier durch Schneiden oder Falten einen geradlinigen Rand, biegt dasselbe dann so um, dass die eine Richtung dieses Randes auf die entgegengesetzte zu liegen kommt, und presst dann den umgebogenen Teil wieder zu einem scharfkantigen Rande zusammen, so bildet dieser neue Rand mit jeder der beiden Richtungen des ursprünglichen einen rechten Winkel. Denn man hat die Halbebene oder den gestreckten Winkel einerseits des ursprünglichen Randes in zwei durch Deckung kongruente Hälften zerlegt: also muss jede Hälfte ein rechter Winkel sein (siehe Figur 17).

Oder: Gibt man einem Blatt Papier durch Schneiden oder Falten einen geradlinigen Rand, falzt eine beliebige Ecke von diesem Rand um und falzt den übrigen Teil des geradlinigen Randes gleichfalls so ein, dass dieses Stück des freien Randes genau neben das ursprüngliche Stück Rand zu liegen kommt — so bilden die beiden neugefalteten Kanten einen rechten Win-

Antwort. Ein Winkelscheit ist ein Instrument aus Metall, Holz, Papier oder irgend einem andern geeigneten Stoffe, welches zwei einen rechten Winkel bildende Strahlen enthält in einer Anordnung, dass dieselben als Kanten eines Lineals benutzt werden können.

Figur 18.



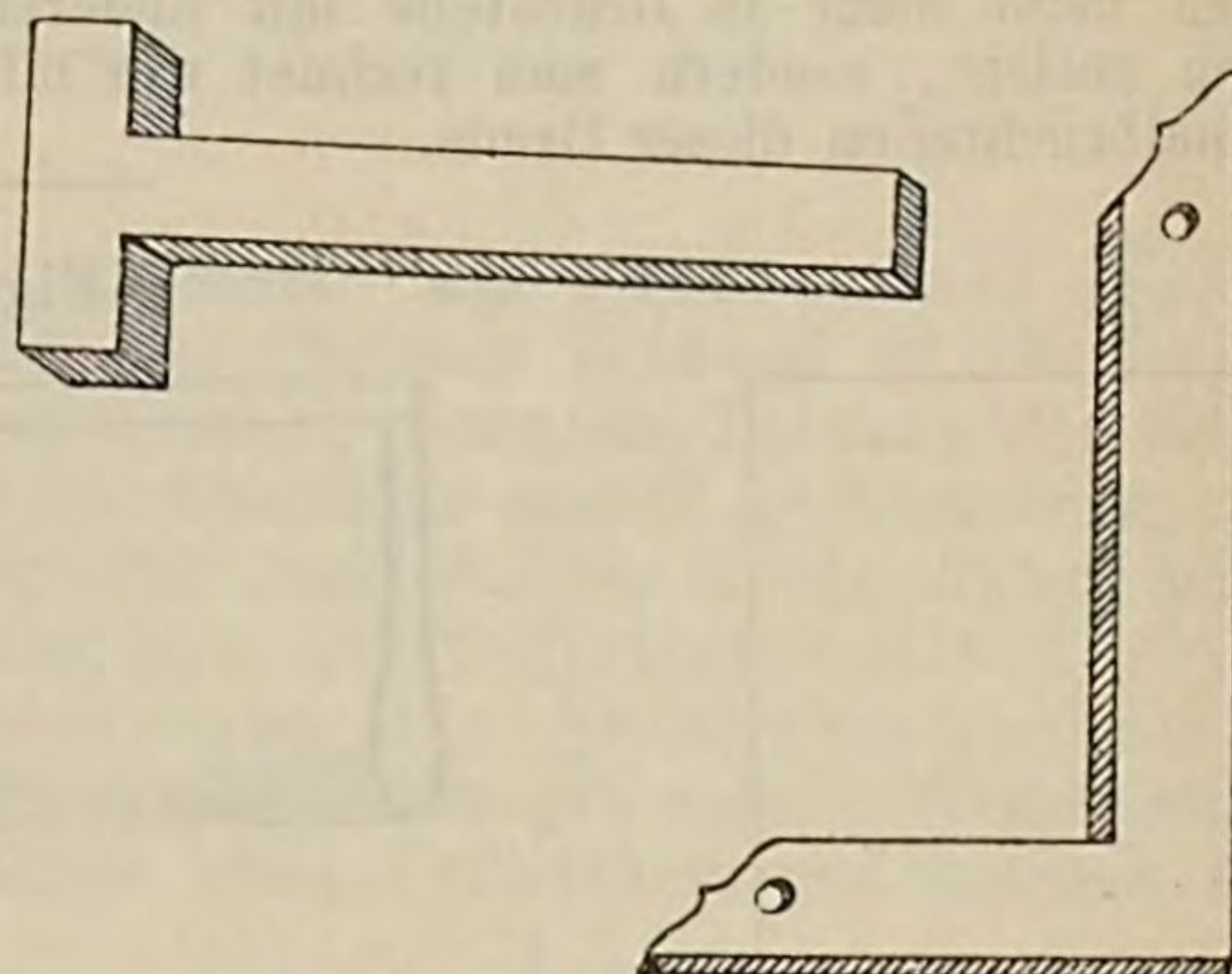
kel. Denn von den drei Teilwinkeln, in welche die Halbebene einerseits des ursprünglichen Randes geteilt wurde, haben die zwei oben aufliegenden kleinen Teile zusammen genau dieselbe Grösse wie der von ihnen zugedeckte untergebliebene Teil, also beträgt die Summe dieser beiden Winkel ebenso viel wie der eine grosse, nämlich je die Hälfte des gestreckten Winkels oder 90° (siehe Figur 18; vergleiche Erkl. 63).

In Figur 19 bis 22 sind einige Formen dargestellt, in welchen derartige Winkelscheite im Handel meist zu erhalten sind. Davon ist besonders das erste unter dem Namen „Reiss-schiene“ bekannt. Das letzte liefert den rechten Winkel fünfmal, nämlich erstens als Winkel seiner beiden Aussenkanten, zweitens und drittens als Winkel seiner (kürzeren) Innenkanten, viertens und fünftens als Winkel je einer solchen Innenkante mit der längsten Aussenkante (siehe Lehrsatz 31). Es kann mit diesem Instrument auch ein Winkelmesser verbunden werden, indem der Mittelpunkt der langen Kante als Scheitel gewählt wird, und die Schenkel der Winkel nebst Ziffern auf den beiden kürzeren Aussenkanten aufgetragen werden.

Erkl. 45. Um ein Winkelscheit auf seine Richtigkeit zu prüfen, zeichnet man mit demselben einen rechten Winkel, und legt sodann an den einen Schenkel nochmals einen rechten Winkel mit demselben Scheitel an. Der neue Schenkel muss mit dem ersten zwei rechte Winkel, also eine gerade Linie bilden.

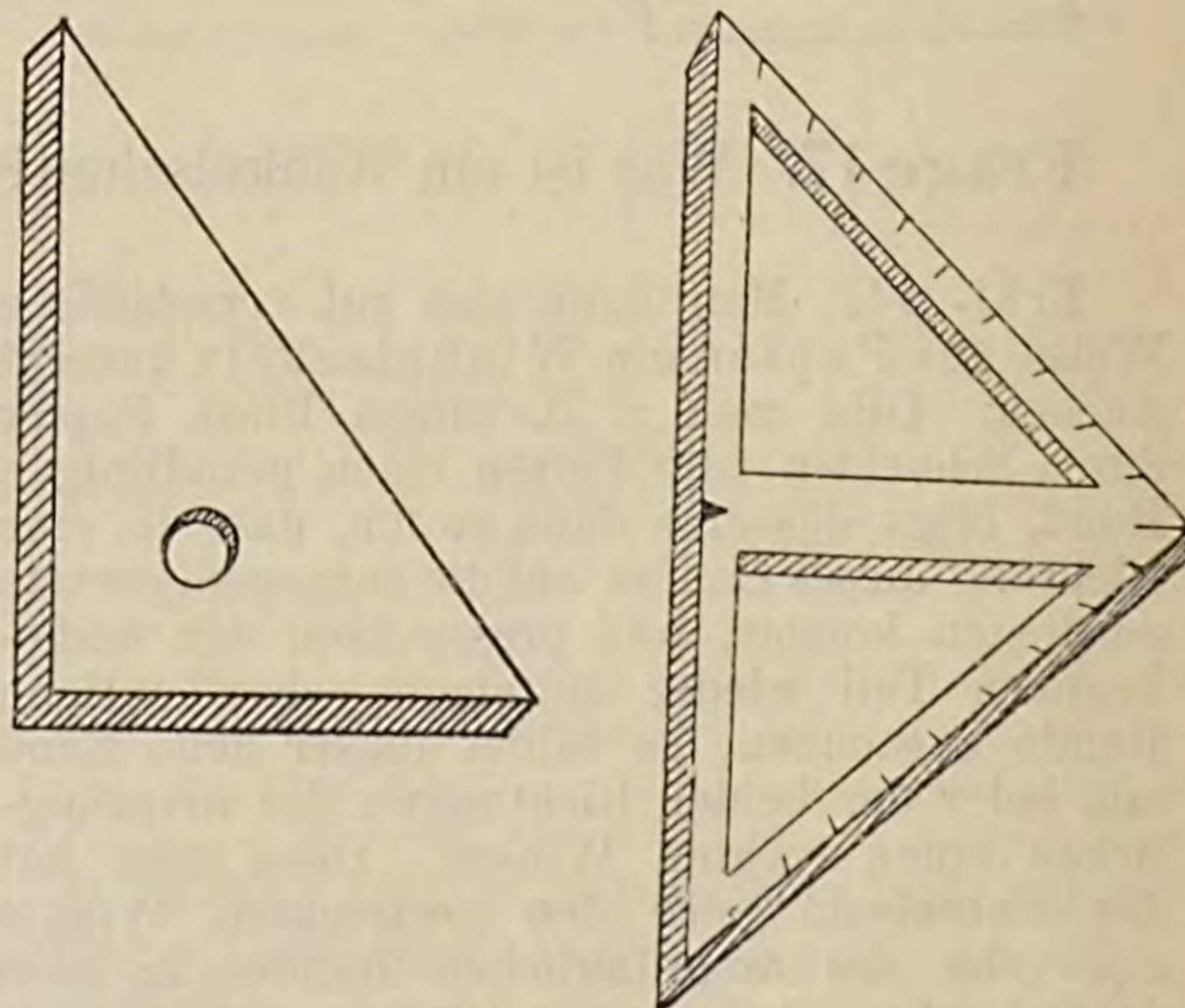
Figur 19.

Figur 20.



Figur 21.

Figur 22.



Frage 18. Was kann man auf Grund der Definition des Vollwinkels, des gestreckten und des rechten Winkels in den Antworten auf die Fragen 15, 16, 17 von diesen Winkeln aussagen?

Antwort. Auf Grund der Definition des vollen, gestreckten und rechten Winkels kann man über diese drei Gattungen von Winkeln folgende Aussagen machen:

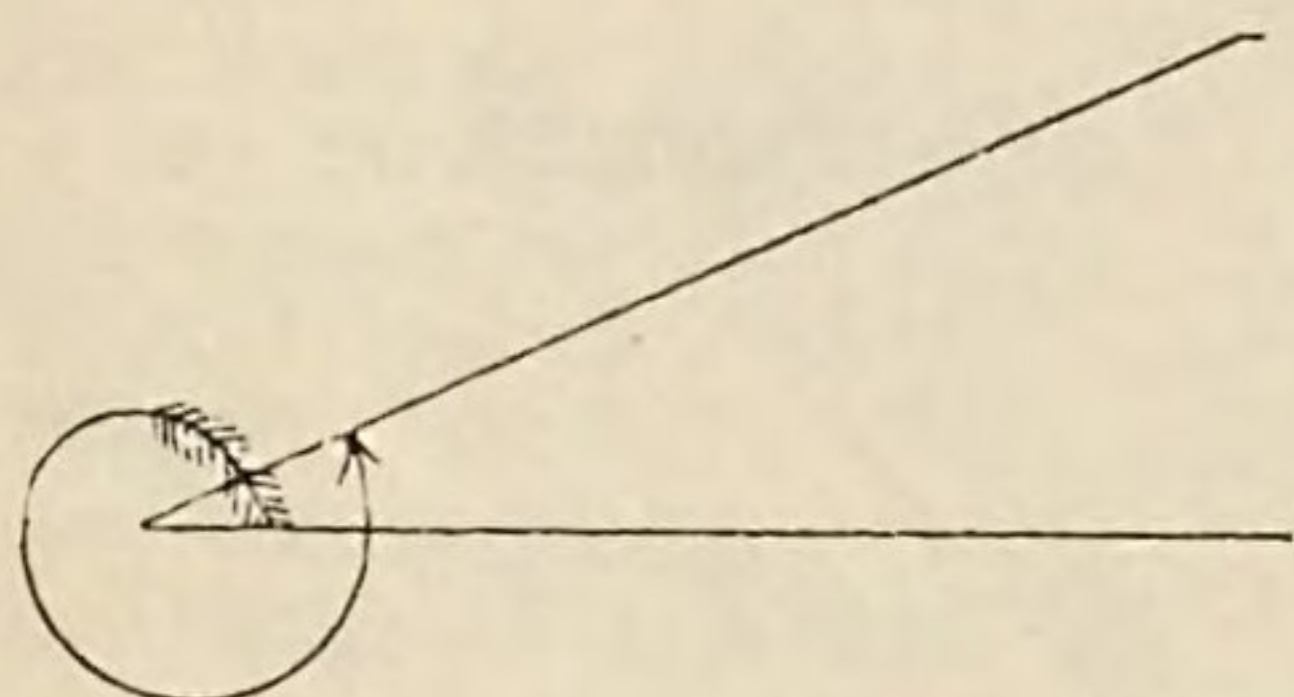
Erkl. 46. Für die vollen und die gestreckten Winkel geht die Richtigkeit dieses Satzes aus der Thatsache hervor, dass alle geraden Linien kongruent sind; für die rechten Winkel und ebensowohl für die gestreckten kann man den Beweis liefern durch den Satz aus der allgemeinen Grössenlehre:

„Wenn mehrere Grössen gleich sind, so sind auch ihre Hälften einander gleich.“

Erkl. 47. Der zweite Satz ist nur die Umkehrung der Benennung des vierten Teils der vollen Umdrehung als eines Rechten. Der rechte Winkel wird häufig auch als Masszahl von Winkeln gebraucht, ganz besonders für den gestreckten; man schreibt alsdann nur den grossen lateinischen Buchstaben R und schreibt $2R$ für den gestreckten, $4R$ für den vollen Winkel.

Frage 19. Wie bezeichnet man solche Arten von allgemeinen Winkeln, welche nicht Vollwinkel, gestreckte oder rechte Winkel sind?

Figur 23.



Erkl. 48. Uebervolle Winkel sind grösser als 360° und kommen in der Elementargeometrie nicht in Anwendung, wohl aber in der Goniometrie (siehe Kleyers Lehrbuch der Goniometrie, Erkl. 69b) und besonders in der höheren Analysis und Funktionentheorie. In der Zeichnung können sie nur durch Beifügung des Bögchens angedeutet werden.

Erkl. 49. Erhabene Winkel sind kleiner als 360° und grösser als 180° . Auch diese kommen in der Elementargeometrie nicht oder doch sehr selten vor und werden dann auch als „einspringende Winkel“ bezeichnet.

Erkl. 50. Hohle Winkel sind kleiner als 180° . Der rechte Winkel selbst ist ein hohler Winkel (s. Figur 25).

Stumpfe Winkel sind kleiner als 180° aber grösser als 90° ; spitze Winkel sind kleiner als 90° .

Lehrsatz 5. Alle vollen Winkel sind gleich und kongruent.

Alle gestreckten Winkel sind gleich und kongruent.

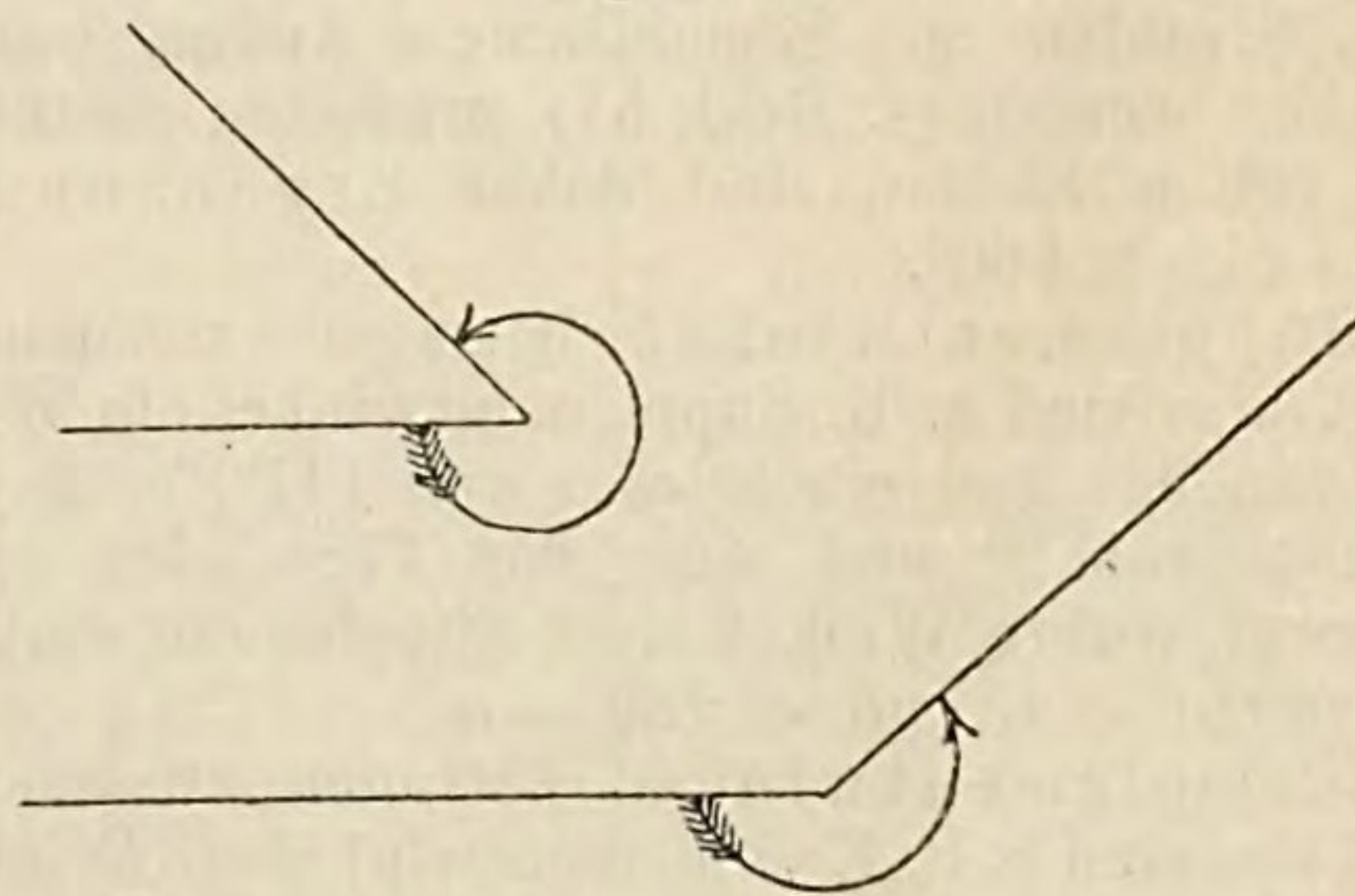
Alle rechten Winkel sind gleich und kongruent.

Lehrsatz 6. Ein voller Winkel ist gleich der Summe von vier rechten, ein gestreckter Winkel ist gleich der Summe von zwei rechten Winkeln.

Antwort. Ausser den bisher betrachteten besonderen Winkelbezeichnungen gebraucht man für übrige Winkelgattungen folgende Benennungen:

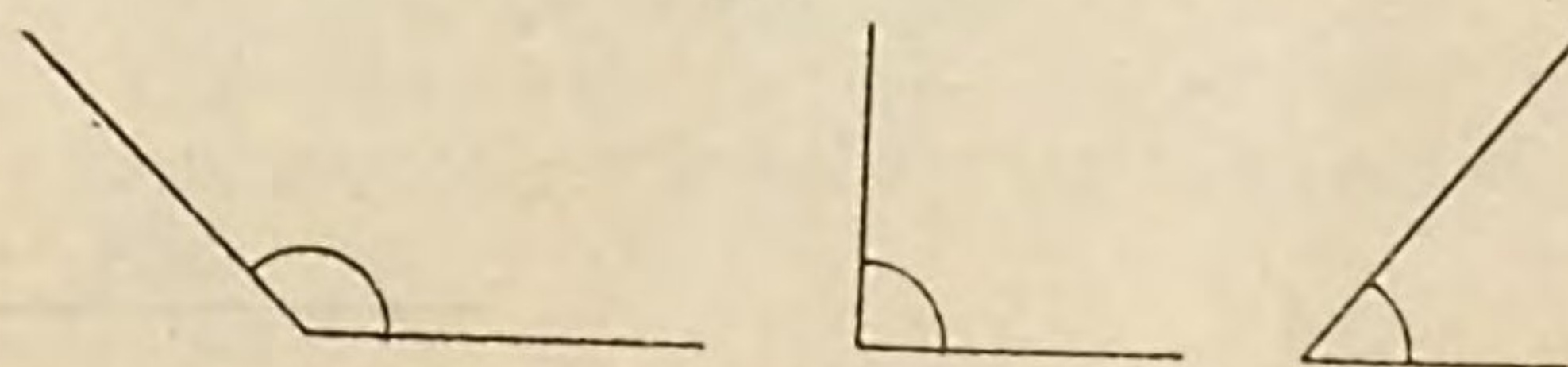
1) Winkel, welche grösser sind, als eine volle Umdrehung, bei welchen also der Endschenkel über die ursprüngliche Lage des Anfangsschenkels noch hinübergedreht worden ist, heissen „übevollwinkel“ (siehe Figur 23).

Figur 24.



2) Winkel, welche kleiner sind als eine volle Umdrehung, aber grösser als eine halbe Umdrehung, bei welchen also der Endschenkel zwar über die Verlängerung des Anfangsschenkels hinüber, aber nicht bis zur Lage des Anfangsschenkels selbst weitergedreht worden ist, heissen „erhabene Winkel“, oder „konvexe Winkel“, oder „überstumpfe Winkel“ (s. Figur 24).

Figur 25.



Erkl. 51. Zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt, welche nicht eine gerade Linie bilden, können stets zwei Winkel bilden, nämlich einen hohlen, wenn die Drehung über den kleineren Teil der Ebene hin stattfand, oder einen erhabenen Winkel, wenn die Drehung über den anderseits liegenden, grösseren Teil der Ebene hin stattfand. Durch Beifügung des Bögchens ist jeweils anzugeben, welcher von beiden Ebenenteilen betrachtet werden soll. Wenn diese nähere Bezeichnung nicht beigefügt ist, so soll von den beiden Winkeln zweier Strahlen nur der hohle Winkel der Betrachtung unterworfen werden.

Erkl. 52. Die beiden Winkel, welche von zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt gebildet werden (s. Erkl. 51), ergänzen einander zur vollen Ebene, sind daher Ergänzungswinkel zu 360° .

Supplementwinkel betragen zusammen 180° , also sind z. B. Supplementwinkel ein Winkel von 33° und ein solcher von 147° , oder ein Winkel von 2° und einer von 178° oder auch je zwei rechte Winkel sind Supplementwinkel. allgemein $\sphericalangle \alpha$ und $\sphericalangle 180 - \alpha$.

Komplementwinkel betragen zusammen 90° , also sind z. B. Komplementwinkel ein Winkel von 33° und ein solcher von 57° , oder ein Winkel von 2° und einer von 88° oder auch ein rechter Winkel und ein Winkel von 0° , allgemein $\sphericalangle \alpha$ und $\sphericalangle 90 - \alpha$.

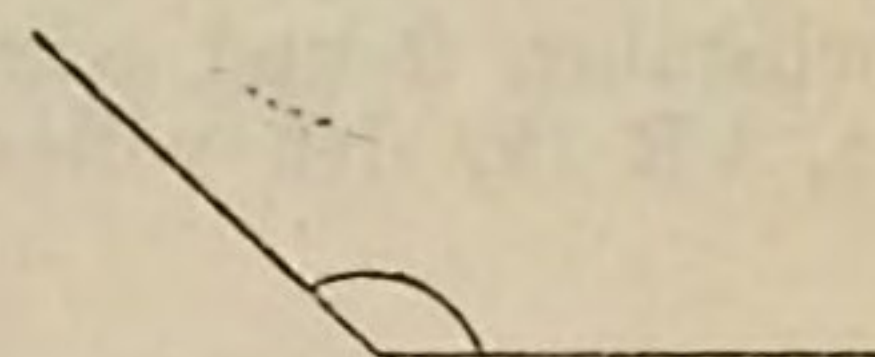
Die Bedeutung der lateinischen Worte supplementum und complementum ist dieselbe, nämlich = Auffüllung, Ergänzung.

3) Winkel, welche kleiner sind, als eine halbe Umdrehung, bei welchen also der Endschenkel nicht bis zur Verlängerung des Anfangsschenkels gedreht worden ist, heissen „hohle Winkel“ oder „konkave Winkel“, (s. Figur 25).

Unter diesen wieder werden

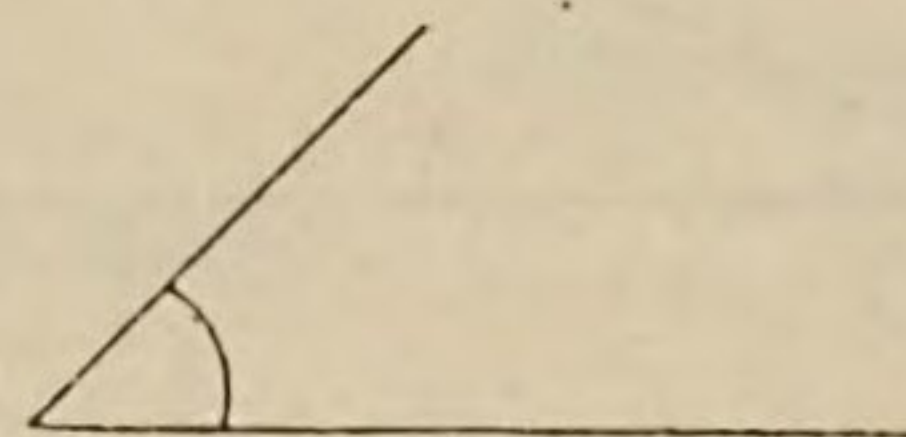
a) solche Winkel, welche grösser als ein rechter Winkel sind, „stumpfe Winkel“ genannt (s. Figur 26),

Figur 26.



b) solche Winkel, welche kleiner als ein rechter Winkel sind, „spitze Winkel“ genannt (s. Figur 27),

Figur 27.



c) beiderlei Winkel, welche grösser oder kleiner als ein rechter Winkel sind, im Gegensatz zum rechten Winkel, „schiefe Winkel“ genannt.

4) Ein Winkel, welcher mit einem andern zusammen eine bestimmte vorgeschriebene Winkelgrösse ergibt, heisst dessen Ergänzungswinkel. Insbesondere bezeichnet man ohne jedesmaligen Zusatz dieser vorgeschriebenen Winkelsumme

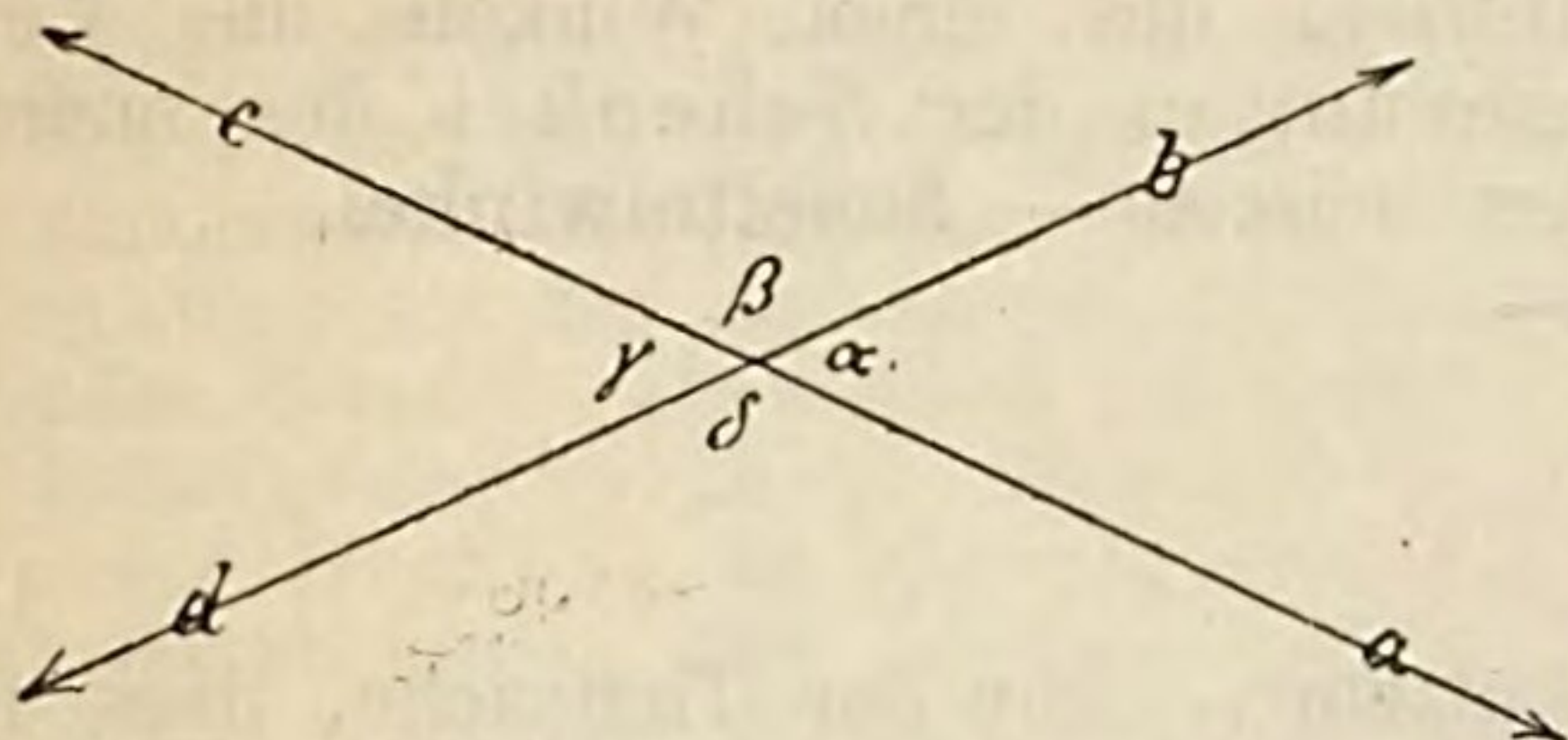
a) solche zwei Winkel, von welchen jeder den andern zu einem gestreckten Winkel ergänzt, als Supplementwinkel oder supplementäre Winkel,

b) solche zwei Winkel, von welchen jeder den andern zu einem rechten Winkel ergänzt, als Komplementwinkel oder komplementäre Winkel.

4) Ueber die Arten der Winkel bezüglich ihrer Lage.

Frage 20. Welche Arten von Winkeln entstehen, wenn man von den Schenkeln eines Winkels auch die Verlängerungen in Betracht zieht?

Figur 28.



Erkl. 53. Wollte man auch die im negativen Drehungssinne gemessenen Winkel hinzunehmen, so würden keine neuen Winkel dazukommen, sondern nur jeder der zwölf in nebenstehender Antwort genannten Winkel auch in entgegengesetzter Drehungsrichtung erscheinen.

Dagegen liesse sich Zahl und Grösse der von jenen vier Strahlen gebildeten Winkel ins unbegrenzte vermehren, wenn man auch die vier vollen Winkel und die beliebig vielen über-vollen Winkel, welche in Fig. 28 auftreten können, mit berücksichtigen wollte (siehe Antwort 1 auf Frage 19 und Erkl. 48).

Frage 21. Wie viele der in Fig. 28 auftretenden Winkel bleiben für die Betrachtung übrig, wenn man sich nach Erkl. 51 auf hohle Winkel beschränkt, und welche besonderen Lagebeziehungen zu einander weisen dieselben auf?

Erkl. 54. Dieselbe Lagebeziehung, in welcher die Winkel α und β zu einander stehen, besteht auch zwischen den Winkeln β und γ — oder γ und δ — oder δ und α ; in der gleichen Beziehung wie die Winkel α und γ stehen auch die Winkel β und δ . Da damit die Gruppierungen der vier Winkel zu je zweien erschöpft sind, so ist der Beweis für die Richtigkeit des Schlusssatzes in nebenstehender Antwort erbracht.

Antwort. Wenn man von den Schenkeln eines Winkels auch die Verlängerungen in Betracht zieht, so hat man vier von einem Punkte ausgehende Strahlen. Von diesen bildet jeder einen in positiver Drehungsrichtung gemessenen Winkel mit jedem der drei übrigen Strahlen, so dass im ganzen 12 Winkel entstehen, nämlich in Fig. 28 die Winkel:

- $\sphericalangle (ab) = \alpha$ (ein spitzer Winkel)
- $\sphericalangle (ac) = \alpha + \beta = 2R$ (ein gestreckter Winkel)
- $\sphericalangle (ad) = \alpha + \beta + \gamma$ (ein überstumpfer Winkel)
- $\sphericalangle (bc) = \beta$ (ein stumpfer Winkel)
- $\sphericalangle (bd) = \beta + \gamma = 2R$ (ein gestreckter Winkel)
- $\sphericalangle (ba) = \beta + \gamma + \delta$ (ein überstumpfer Winkel)

und so weiter die $\sphericalangle (cd)$, $\sphericalangle (ca)$, $\sphericalangle (cb)$
und die $\sphericalangle (da)$, $\sphericalangle (db)$, $\sphericalangle (dc)$.

Antwort. Wenn man von den Winkeln, welche durch zwei einander schneidende unbegrenzte Gerade gebildet werden, nur die hohlen Winkel berücksichtigt, so beschränkt sich die Betrachtung auf die vier Winkel α , β , γ , δ in Fig. 28.

Von diesen vier Winkeln hat z. B. α mit β den gleichen Scheitel, der Endschenkel b des $\sphericalangle \alpha$ ist Anfangsschenkel des $\sphericalangle \beta$, und der Endschenkel des $\sphericalangle \beta$ ist die Verlängerung des Anfangsschenkels des $\sphericalangle \alpha$.

Auch mit $\sphericalangle \gamma$ hat $\sphericalangle \alpha$ den gleichen Scheitel. Dagegen ist der Anfangsschenkel c des $\sphericalangle \gamma$ die Verlängerung des Anfangsschenkels a von α und ebenso der Endschenkel d des $\sphericalangle \gamma$ die Verlängerung des Endschenkels b des $\sphericalangle \alpha$.

Andere Arten der Lagebeziehung unter den vier Winkeln treten nicht auf (siehe Erkl. 54).

Frage 22. Wie bezeichnet man solche Paare von Winkeln, welche in einer der in voriger Antwort gekennzeichneten Lagebeziehungen zu einander stehen?

Erkl. 55. In Figur 28 sind also Nebenwinkel die Winkelpaare α und β , β und γ , γ und δ , δ und α ; Scheitelwinkel die Winkelpaare α und γ , β und δ . Jeder Winkel in Figur 28 hat zwei Nebenwinkel und einen Scheitelwinkel.

Antwort. 1) Zwei Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben, und deren andere Schenkel eine Gerade bilden, heissen — **Nebenwinkel**.

2) Zwei Winkel, welche den Scheitel gemeinsam haben, und bei welchen die Schenkel des einen Winkels die Verlängerungen der Schenkel des andern bilden, heissen — **Scheitelwinkel**.

Frage 23. Was folgt aus der Erklärung zweier Nebenwinkel hinsichtlich ihrer Grösse?

Erkl. 56. Von den vier Paaren von Nebenwinkeln in Figur 28 gilt also:

$$\begin{aligned}\alpha &= 180^\circ - \beta \text{ und } \beta = 180^\circ - \alpha \\ \beta &= 180^\circ - \gamma \text{ und } \gamma = 180^\circ - \beta \\ \gamma &= 180^\circ - \delta \text{ und } \delta = 180^\circ - \gamma \\ \delta &= 180^\circ - \alpha \text{ und } \alpha = 180^\circ - \delta\end{aligned}$$

Allgemein: Der Nebenwinkel eines Winkels von n° hat $180 - n^\circ$.

Antwort. Aus der Thatsache, dass der Anfangsschenkel eines Winkels mit dem Endschenkel seines Nebenwinkels eine gerade Linie, also einen gestreckten Winkel bildet, folgt, dass Nebenwinkel Supplementwinkel sind (s. Antwort 4 auf Frage 19), also:

Lehrsatz 7. Zwei Nebenwinkel betragen zusammen zwei Rechte oder 180° .

Frage 24. Was für Folgerungen ergeben sich aus Lehrsatz 7 und Erkl. 56 für besondere Fälle von zwei Nebenwinkeln?

Erkl. 57:

Zu 1): $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Zu 2) und 3): Damit $x = 180^\circ - x$,
muss $x = 90^\circ$ sein.

Zu 4): Hat der eine Nebenwinkel jeweils n° , so muss der andere jeweils $180^\circ - n^\circ$ haben.

Zu 5): Die Richtigkeit folgt aus Lehrsatz 5, wonach alle gestreckten Winkel zur Deckung gebracht werden können.

Zu 6): Ist $\alpha + \beta = 180^\circ$, so muss:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

sein. (Siehe Lehrsatz 9.)

Antwort. Auf Grund des vorigen Lehrsatzes sowie der Erkl. 56 kann man für einzelne Fälle von Nebenwinkeln folgende Aussagen machen:

1) Der Nebenwinkel eines rechten Winkels ist ebenfalls ein rechter Winkel.

2) Sind zwei Nebenwinkel gleich gross, so ist jeder ein rechter Winkel.

3) Der rechte Winkel ist der einzige Winkel, welcher seinem Nebenwinkel gleich ist.

4) Haben zwei oder mehrere Winkel gleich grosse Nebenwinkel, so sind sie unter sich gleich; oder: die Nebenwinkel gleicher Winkel sind ebenfalls gleich.

5) Ist die Summe von zwei oder mehreren nebeneinanderliegenden Winkeln 180° , so bildet der Anfangsschenkel des ersten Winkels mit dem Endschenkel des letzten eine gerade Linie.

6) Die Hälften zweier Nebenwinkel betragen zusammen einen Rechten oder 90° .

Frage 25. Wie lässt sich die vierte Aussage voriger Antwort anwenden auf die Grössenbeziehung zweier Scheitelwinkel?

Erkl. 58. Es haben z. B. die Winkel α und γ zum Nebenwinkel den $\sphericalangle \beta$, also nach Erkl. 56:

$$\alpha = 180 - \beta = \gamma$$

Erkl. 59. Die Gleichheit zweier Scheitelwinkel lässt sich auch erkennen aus der Entstehungsweise der beiden Winkel durch die Drehung der den Anfangsschenkel beider bildenden Geraden: Da nämlich bei Drehung eines Schenkels seine Verlängerung stets die gleich grosse Drehung im gleichen Drehungssinne mitmachen muss, und da zugleich mit dem Schenkel des einen Winkels auch derjenige des Scheitelwinkels auf dem Endschenkel seines Winkels ankommt, so muss auch die von beiden Schenkeln durchlaufene Drehungsgrösse beidemale dieselbe sein. Um ein praktisches Beispiel zu haben, denke man z. B. an die Arme einer Schere.

Erkl. 60. Die vier Winkel zweier sich schneidenden Geraden weisen nur zweierlei zu einander supplementäre Winkelgrössen auf, nämlich:

- 1) . . . $\alpha = \gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - \delta$ und
 - 2) . . . $\beta = \delta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \gamma$
-

Frage 26. Welche Aussagen über Scheitelwinkel lassen sich auf Grund der Antwort 25 machen, entsprechend jenen über Nebenwinkel in Antwort 24?

Erkl. 61. Aussage 1 ist eine Bestätigung zu Lehrsatz 6 und Erkl. 47, wonach die Summe der um einen Punkt herumliegenden Winkel gleich vier Rechten ist.

Der Beweis für den zweiten Satz lässt sich folgendermassen führen: Da nach Voraussetzung $\sphericalangle (ac)$ ein gestreckter ist, so muss $\alpha + \beta = 2R$ sein; da ferner $\alpha = \gamma$ sein soll, so muss auch $\gamma + \beta = 2R$, d. h. auch $\sphericalangle (bd)$ ein gestreckter sein — was zu beweisen war.

Antwort. Aus Antwort 4 auf Frage 24 und aus Erkl. 56 folgt für die Grösse zweier Scheitelwinkel:

Lehrsatz 8. Zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Antwort. Den Aussagen über Nebenwinkel in Antwort 24 lassen sich folgende Aussagen über Scheitelwinkel an die Seite stellen:

1) Verlängert man die Schenkel eines rechten Winkels, so entsteht eine Figur von vier rechten Winkeln um denselben Scheitelpunkt [$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$ (s. Erkl. 60)].

2) Trägt man an einem Strahl und seiner Verlängerung (a und c in Figur 28) zwei gleiche Winkel in gleichem Drehungssinne an (α und γ in Figur 28), so bilden die Endschenkel dieser beiden Winkel wieder eine gerade Linie.

3) Die Hälften von Scheitelwinkeln sind (alle vier) einander gleich.

Frage 27. Welche Fassung kann man den letzten Aussagen in den Antworten 24 und 26 geben?

Antwort. Die Sätze 24, 6) und 26, 3) lassen sich in folgender Weise aussprechen:

Erkl. 62. Der erste Teil ist schon bewiesen für die Halbierenden der $\angle \alpha$ und β in Erkl. 57, 6). Der zweite Teil folgt entweder aus wiederholter Anwendung desselben ersten Satzes für die Halbierenden der Nebenwinkel β und γ ; oder aus Antwort 26, 3), indem nach derselben der Winkel zwischen den Halbierenden von $\angle \alpha$ und γ sein muss

$$= \frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{\gamma}{2} = \beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \beta + \alpha = 2R$$

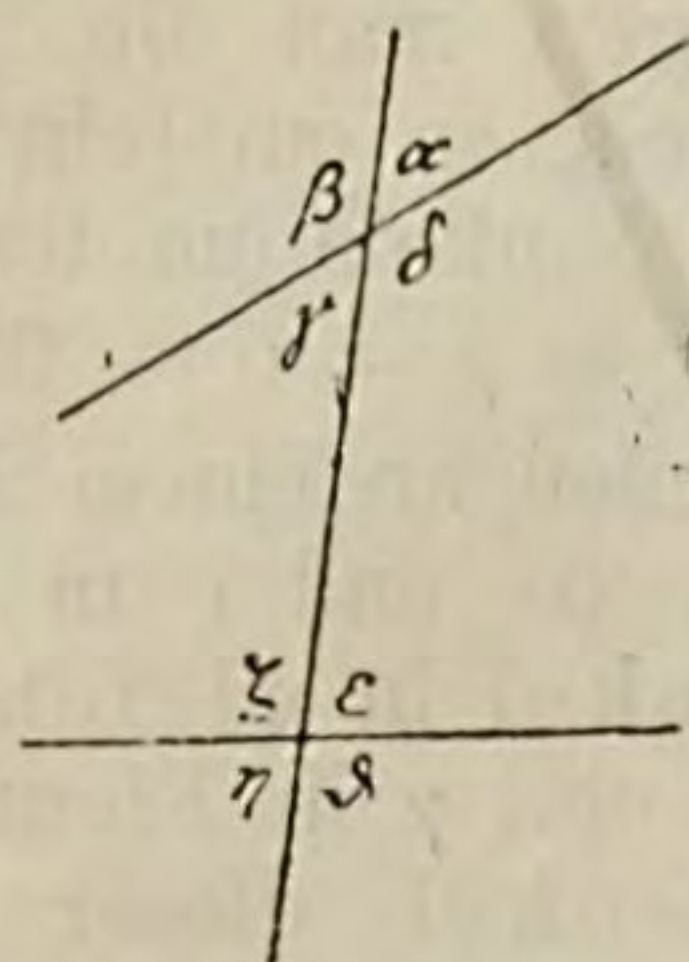
oder endlich aus Antwort 26, 2), da je an einem Schenkel des $\angle \alpha$ und dessen Verlängerung die gleichen Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ angetragen sind in gleichem Drehungssinne.

Erkl. 63. Eine praktische Anwendung des Lehrsatzes 9 liegt schon in der Herstellung des Winkelscheites nach Anleitung der Erkl. 44 und Figur 18. Die Schenkel jenes rechten Winkels sind nämlich die Halbierungslinien derjenigen beiden Nebenwinkel, welche gebildet werden durch den ursprünglichen freien Rand des Papierblattes und durch diejenige Linie, welche von den eingebogenen Randstrecken in der umgeklappten Lage gemeinschaftlich gebildet wird.

Frage 28. Welche Arten von Winkeln entstehen, wenn zwei beliebige gerade Linien einer Ebene von einer dritten Geraden durchschnitten werden?

Erkl. 64. Die dritte, durchschneidende Linie, wird auch Transversale genannt (vom lateinischen trans = über, versus = wärts, gegen hin, also transversus = darüber hingehend).

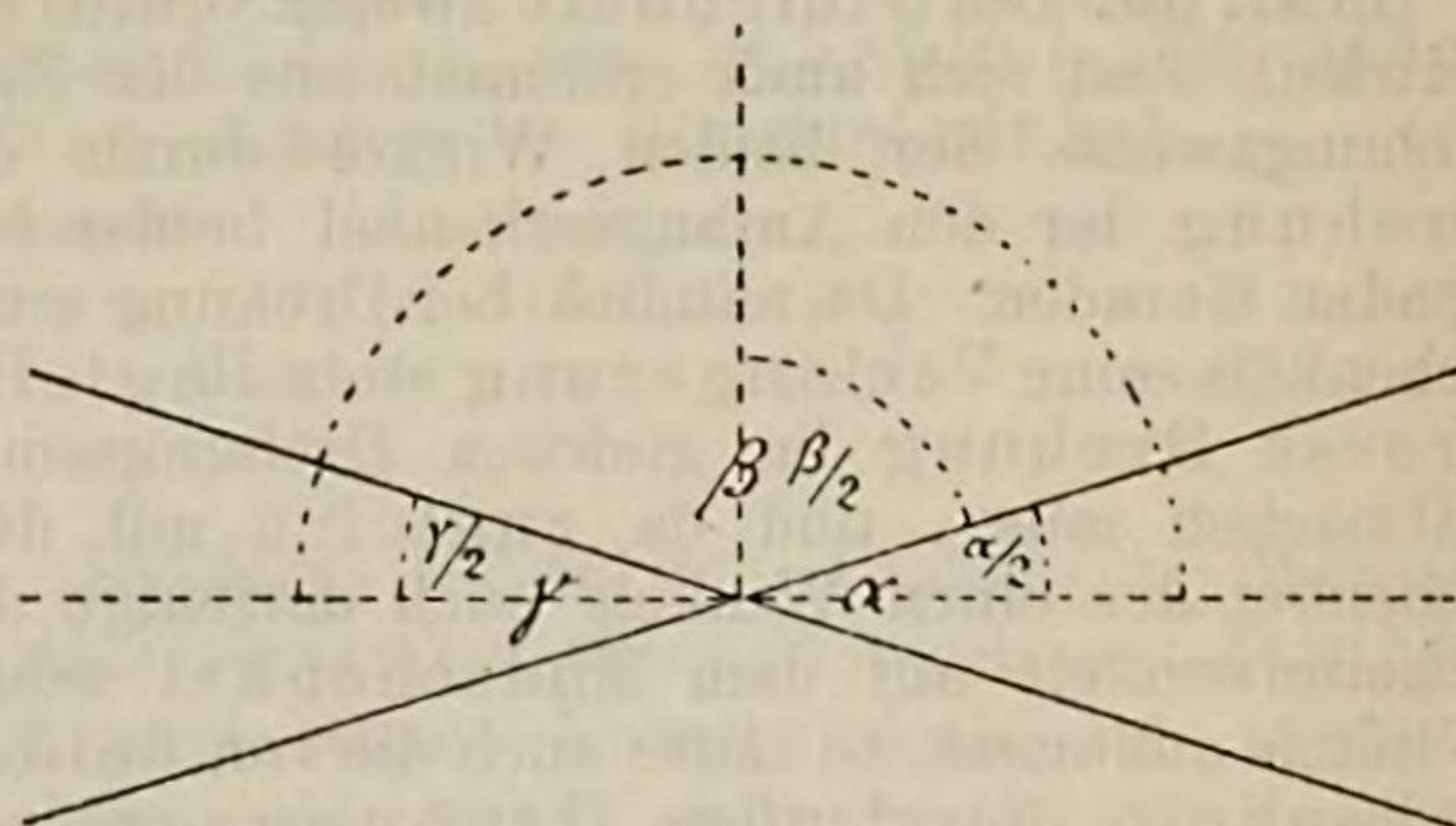
Figur 30.



Frage 29. Welche einzelne Lagebeziehungen erhält man, wenn je ein Winkel am einen Schnittpunkt mit je einem der Winkel am andern Schnittpunkt in Beziehung gesetzt wird?

Lehrsatz 9. Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel bilden einen rechten Winkel oder stehen senkrecht; die Halbierenden zweier Scheitelwinkel bilden einen gestreckten Winkel oder eine einzige Gerade (siehe Figur 29).

Figur 29.



Antwort. Wenn zwei in einer Ebene liegende gerade Linien (siehe Antworten auf Frage 44 des ersten Teils) von einer Transversalen durchschnitten werden, so entstehen an jedem der beiden Schnittpunkte der Transversalen mit einer der beiden Linien vier hohle Winkel, also zusammen acht Winkel (siehe Figur 30).

Unter diesen acht Winkeln hat man zunächst folgende allgemeine Beziehungen:

1) Diejenigen vier Winkel, welche sich ausserhalb des zwischen den beiden durchschnittenen Linien liegenden Ebenenteiles befinden, heissen äussere Winkel: $\alpha, \beta, \eta, \theta$.

2) Diejenigen vier Winkel, welche sich innerhalb des zwischen den beiden durchschnittenen Linien liegenden Ebenenteiles befinden, heissen innere Winkel: $\gamma, \delta, \epsilon, \zeta$.

Antwort. Wenn man einen Winkel am einen Schnittpunkt der Reihe nach mit je einem der vier Winkel am andern

Erkl. 65. Dieselbe Lagebeziehung (Ia), in welcher die Winkel α und ε zu einander stehen, besteht auf derselben Seite der Transversalen zwischen den Winkeln δ und ϑ , sowie auf der andern Seite der Transversalen zwischen den Winkelpaaren β, ζ und γ, η ; in der gleichen Beziehung (Ib) wie die Winkel α und ϑ stehen auch die Winkel β, η ; wie δ, ε (Ic) verhalten sich γ, ζ ; wie α und ζ (IIa) auch δ, η und β, ε und γ, ϑ ; ferner wie α, η (IIb) auch β, ϑ ; und endlich wie δ, ζ (IIc) auch γ, ε .

Damit sind aber die 16 möglichen Gruppierungen je eines der vier Winkel am einen mit je einem der vier Winkel am andern Schnittpunkte erschöpft; diese sind nämlich folgendermassen in die Einzelfälle verteilt:

$\alpha \varepsilon \dots$	Ia	$\beta \varepsilon \dots$	IIa	$\gamma \varepsilon \dots$	IIc	$\delta \varepsilon \dots$	Ic
$\alpha \zeta \dots$	IIa	$\beta \zeta \dots$	Ia	$\gamma \zeta \dots$	Ic	$\delta \zeta \dots$	IIc
$\alpha \eta \dots$	IIb	$\beta \eta \dots$	Ib	$\gamma \eta \dots$	Ia	$\delta \eta \dots$	IIa
$\alpha \vartheta \dots$	Ib	$\beta \vartheta \dots$	IIb	$\gamma \vartheta \dots$	IIa	$\delta \vartheta \dots$	Ia

Schnittpunkte in Beziehung setzt, so entstehen folgende Einzelbeziehungen je zweier Winkel:

Man kann zusammenfassen einen Winkel am einen Schnittpunkte mit einem solchen, der am andern Schnittpunkte

I) auf der gleichen Seite der Transversalen liegt, und zwar

- einen äusseren Winkel mit einem innern (α und ε)
- einen äusseren Winkel mit einem äusseren (α und ϑ)
- einen innern Winkel mit einem innern (δ und ε); —

oder einen Winkel am einen Schnittpunkt mit einem solchen, der am andern Schnittpunkte

II) auf der gegenüberliegenden Seite der Transversalen liegt, und zwar auch hier wieder

- einen äusseren Winkel mit einem innern (α und ζ)
- einen äusseren Winkel mit einem äusseren (α und η)
- einen innern Winkel mit einem innern (δ und ζ).

Andere Arten der Lagebeziehung zwischen je einem Winkel am einen und einem Winkel am andern Schnittpunkt treten nicht auf.

Frage 30. Wie bezeichnet man solche Paare von Winkeln, welche in einer der in voriger Antwort gekennzeichneten Lagebeziehungen zu einander stehen.

Erkl. 66. In Figur 30 sind also die Winkelpaare:

α, ε	}	Korrespondierende oder Gegenwinkel.
β, ζ		
γ, η		
δ, ϑ		
α, ϑ	} äussere	} Entgegengesetzte oder Ergänzungswinkel
β, η		
δ, ε	} innere	
γ, ζ		
α, η	} äussere	} Wechselwinkel
β, ϑ		
δ, ζ	} innere	
γ, ε		

Jeder Winkel in Figur 30 hat einen korrespondierenden Winkel, einen äusseren und einen inneren entgegengesetzten Winkel und einen äusseren und einen inneren Wechselwinkel.

Antwort. Für die Lagebeziehungen je eines Winkel am einen und eines Winkels am andern Schnittpunkte zweier Geraden mit einer Transversale hat man folgende Bezeichnungen:

1) Je ein äusserer Winkel am einen Schnittpunkte und der auf derselben Seite der Transversalen liegende innere Winkel am andern Schnittpunkte heissen **korrespondierende Winkel** oder Gegenwinkel (Ia in Antwort 29).

2) Je zwei auf derselben Seite der Transversalen liegende Winkel an den beiden Schnittpunkten, welche beide innere oder beide äussere Winkel sind, heissen entgegengesetzte Winkel oder Ergänzungswinkel — und zwar „äussere entgegengesetzte Winkel“, oder „innere entgegengesetzte Winkel“, je nachdem beide äussere (Ib) oder beide innere Winkel (Ic) sind.

Erkl. 67. Für die in Antwort auf Frage 29 unter IIa aufgeführte Lagenbeziehung zweier Winkel hat man keine besondere Benennung; auch von den in Antwort 30 angegebenen Bezeichnungen findet die erste und dritte Beziehung der korrespondierenden und der Wechselwinkel ungleich häufiger Anwendung, als die zweite der entgegengesetzten Winkel.

3) Je zwei auf verschiedenen Seiten der Transversalen liegende Winkel an den beiden Schnittpunkten, welche beide innere oder beide äussere Winkel sind, heissen **Wechselwinkel** — und zwar „äussere Wechselwinkel“ oder „innere Wechselwinkel“, je nachdem beide äussere (IIb) oder beide innere Winkel (IIc) sind.

Frage 31. Was lässt sich aussagen über die Grössebeziehungen der acht Winkel an den Schnittpunkten zweier Geraden mit einer Transversalen auf Grund der Lehrsätze 7 und 8 sowie der Erkl. 60?

Erkl. 68. Es ist nämlich zu 1):

$$1) \dots \alpha = \gamma = 180 - \beta = 180 - \delta$$

$$2) \dots \beta = \delta = 180 - \alpha = 180 - \gamma$$

$$3) \dots \varepsilon = \eta = 180 - \zeta = 180 - \delta$$

$$4) \dots \zeta = \vartheta = 180 - \varepsilon = 180 - \eta$$

Erkl. 69. Zu 2): Wird $\alpha = \varepsilon$, so wird

$$\alpha = \gamma = \varepsilon = \eta \text{ und}$$

$$\beta = \delta = 180 - \alpha = 180 - \varepsilon = \zeta = \vartheta$$

Oder wird $\alpha = \zeta$, so wird

$$\alpha = \gamma = \zeta = \vartheta \text{ und}$$

$$\beta = \delta = 180 - \alpha = 180 - \zeta = \varepsilon = \eta$$

(Siehe Erkl. 68 und Figur 31 und 32.)

Zu 3): Wird $\alpha = 180 - \varepsilon$, so wird

$$\alpha = \gamma = 180 - \varepsilon = \zeta = \vartheta$$

$$\beta = \delta = 180 - \alpha = \varepsilon = \eta$$

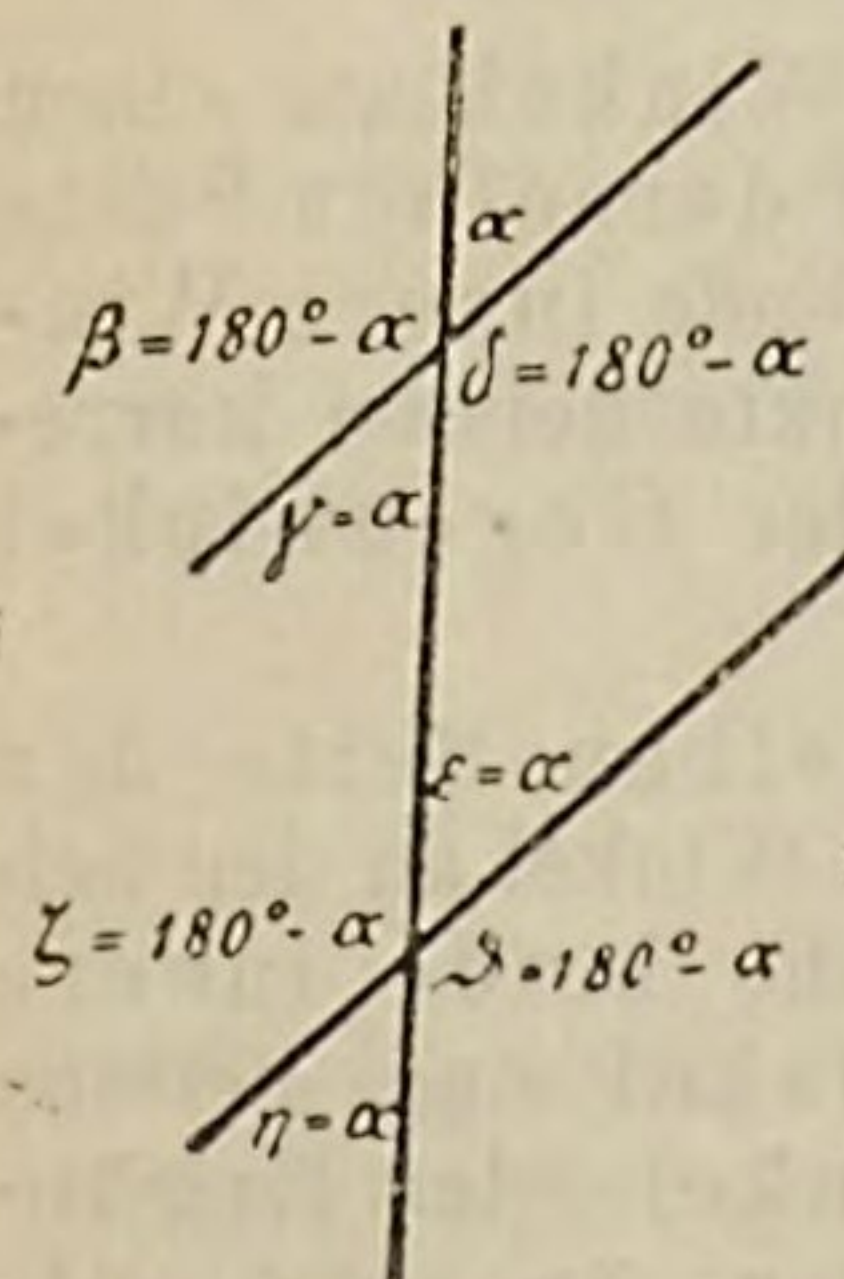
Oder wird $\alpha = 180 - \zeta$, so wird

$$\alpha = \gamma = 180 - \zeta = \varepsilon = \eta$$

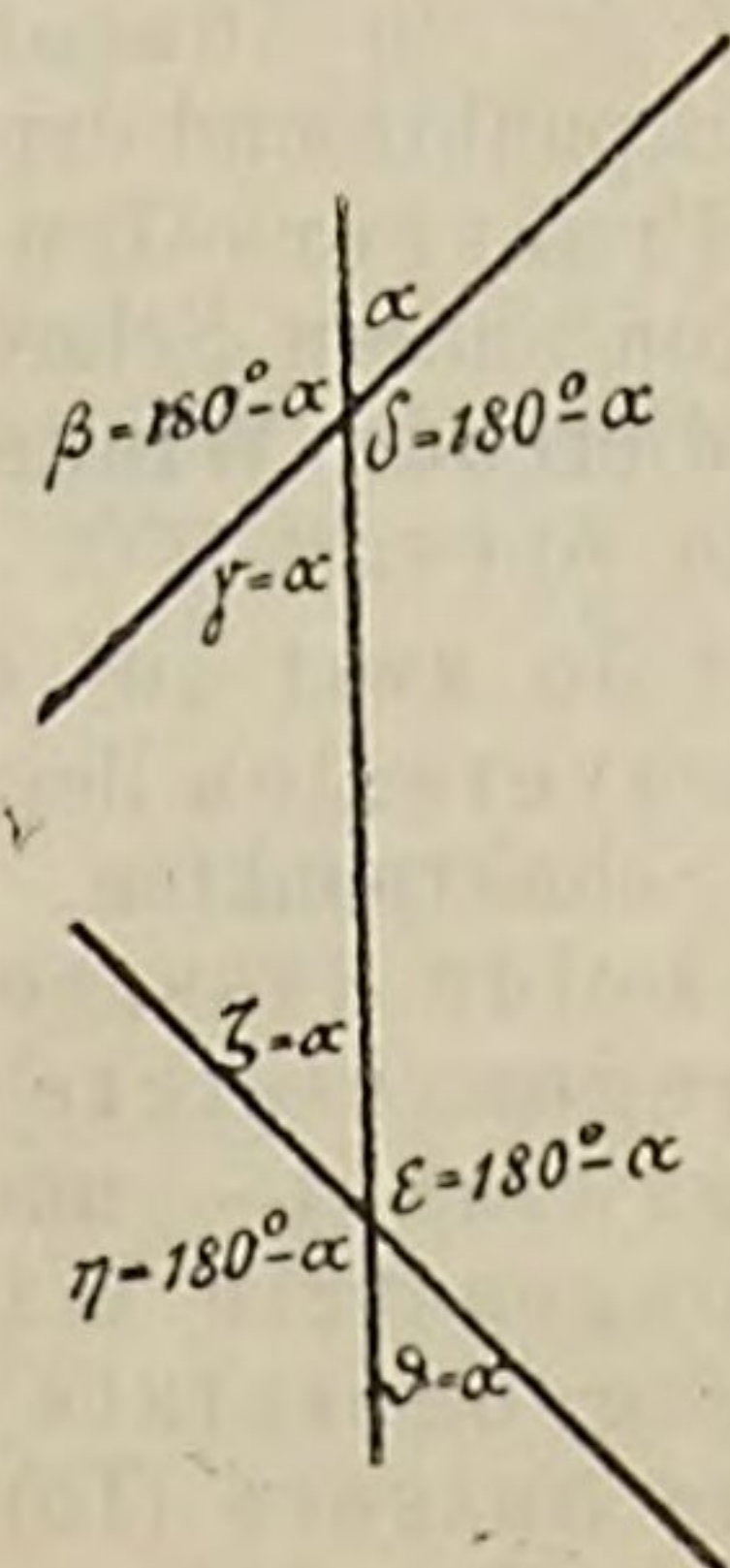
$$\beta = \delta = 180 - \alpha = \zeta = \vartheta$$

(Siehe Erkl. 68 und Figur 32 und 31.)

Figur 31.



Figur 32.



Antwort. Aus den Lehrsätzen 7 und 8 sowie aus Erkl. 60 lassen sich folgende Aussagen über die Grössebeziehungen der besprochenen acht Winkel ableiten:

1) Da die vier Winkel an jedem Schnittpunkt unter sich zu einander in der Beziehung als Nebenwinkel und Scheitelwinkel stehen, so weisen die acht Winkel an beiden Schnittpunkten zusammen nur vier verschiedenerlei Winkelgrössen auf, von denen noch je zwei supplementär sind.

2) Wenn also irgend einer der Winkel am einen Schnittpunkt gleich gross wird irgend einem der Winkel am andern Schnittpunkt, so sind auch die Scheitelwinkel beider Winkel unter sich und mit den ersten Winkeln gleich und die beiden Nebenwinkel des ersten sind unter sich und mit den Nebenwinkeln des zweiten gleich, sie sind Supplementwinkel der ersten Winkel — und man hat unter den acht Winkeln nur noch zweierlei Winkelgrössen (s. Figur 31 und 32).

3) Wenn aber irgend einer der Winkel am einen Schnittpunkt supplementär wird zu irgend einem der Winkel am andern Schnittpunkt, so sind auch die Scheitelwinkel beider Winkel unter sich supplementär und die Nebenwinkel des ersten sind Supplementwinkel zu den Nebenwinkeln des zweiten Winkels, diesem zweiten Winkel selber aber gleich gross (s. Figur 32 und 31).

4) Sowie also irgend ein Winkel am einen Schnittpunkt mit irgend einem der Winkel am andern Schnittpunkt entweder gleich gross oder supplementär wird, so hat man unter den acht Winkeln an beiden Schnittpunkten nur noch zweierlei Winkelgrössen, welche selbst zu einander supplementär sind, nämlich α und $180^\circ - \alpha$. Dann ist also die Grösse von allen acht Winkeln eindeutig bestimmt, wenn ein einziger der acht Winkel gegeben ist.

Frage 32. Wie kann man das Ergebnis der in voriger Antwort angestellten Betrachtungen zusammenfassend aussprechen unter Berücksichtigung der in Antwort 30 festgesetzten Bezeichnungen?

Erkl. 70. Um den Beweis für einen einzelnen dieser Fälle zu wiederholen, z. B. für den dritten Fall im Lehrsatz 10 machen wir die

Voraussetzung.

$\angle \alpha$ und ϑ seien supplementär, d. h. $\vartheta = 180 - \alpha$

Behauptung.

$$\begin{array}{lll} \text{I) } \alpha = \varepsilon & \text{II) } \alpha = \eta & \text{III) } \alpha = 180 - \vartheta \\ \beta = \zeta & \beta = \vartheta & \beta = 180 - \eta \\ \gamma = \eta & \gamma = \varepsilon & \gamma = 180 - \zeta \\ \delta = \vartheta & \delta = \zeta & \delta = 180 - \varepsilon \end{array}$$

Beweis. Da $\delta = 180 - \alpha$, so ist ζ als Scheitelwinkel ebenfalls $= 180 - \alpha$; ferner sind als Nebenwinkel zu α auch β und $\delta = 180 - \alpha$; also hat man schon:

$$\beta = \delta = \zeta = \vartheta = 180 - \alpha$$

Weiter sind aber ε und η als Nebenwinkel zu $\vartheta = 180 - \vartheta = \alpha$, und γ als Scheitelwinkel $= \alpha$, also hat man auch:

$$\alpha = \gamma = \varepsilon = \eta = 180 - \vartheta$$

Daher ist zusammen:

$$\begin{array}{l} 1) \alpha = \gamma = \varepsilon = \eta = 180 - \beta = 180 - \delta = \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 180 - \zeta = 180 - \vartheta \\ 2) \beta = \delta = \zeta = \vartheta = 180 - \alpha = 180 - \gamma = \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 180 - \varepsilon = 180 - \eta \end{array}$$

Antwort. Man kann die in Antwort 31 und Figur 31 u. 32 erkannten Größenbeziehungen folgendermassen zusammenfassen:

Lehrsatz 10. Sind an zwei von einer Transversalen durchschnittenen Geraden irgend zwei korrespondierende Winkel gleich — oder:

sind irgend zwei Wechselwinkel gleich — oder:

sind irgend zwei entgegengesetzte Winkel supplementär —

so sind sämtliche korrespondierenden Winkel gleich

und sämtliche Wechselwinkel gleich

und sämtliche entgegengesetzten Winkel supplementär.

Lehrsatz 11. Sind an zwei von einer Transversalen durchschnittenen Geraden irgend zwei korrespondierende Winkel supplementär — oder:

sind irgend zwei Wechselwinkel supplementär — oder:

sind irgend zwei entgegengesetzte Winkel gleich —

so sind sämtliche korrespondierenden Winkel supplementär

und sämtliche Wechselwinkel supplementär

und sämtliche entgegengesetzten Winkel gleich.

5) Ueber die Winkel der Vielecke.

Frage 33. Was ist ein Vieleck?

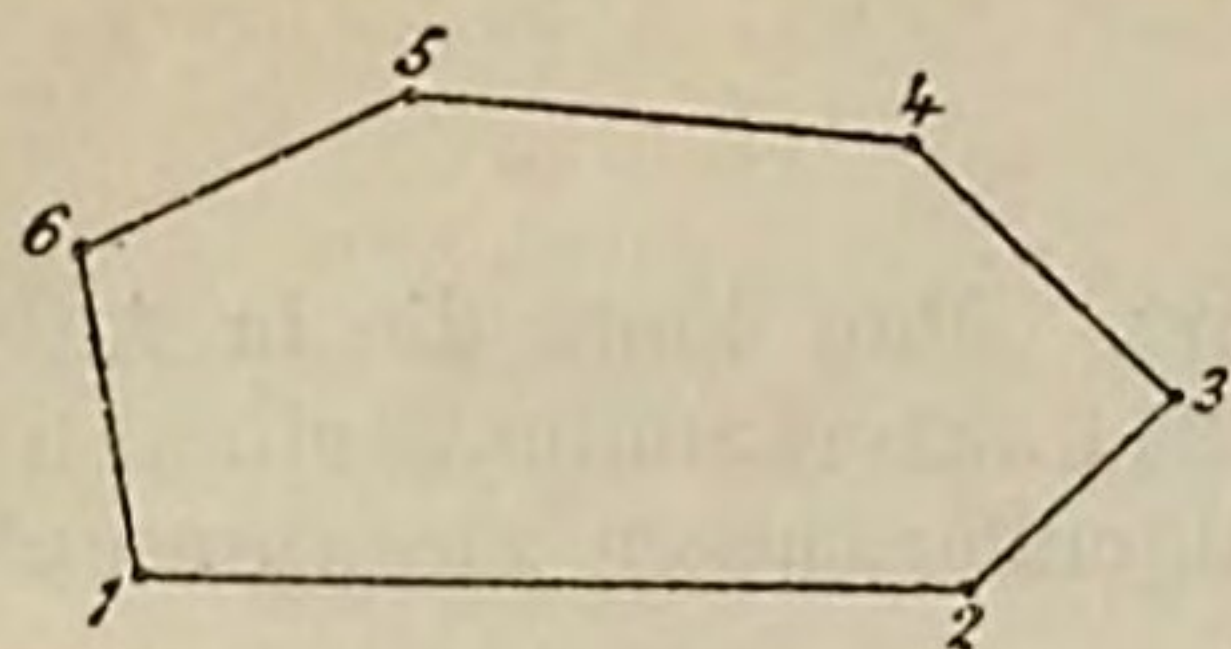
Erkl. 71. Das nebenstehend definierte Vieleck heisst auch ein „ebenes Vieleck“ im Gegensatz zum „windschiefen Vieleck“, dessen begrenzende Geraden nicht in einer Ebene liegen (s. Stereometrie).

Antwort. Ein Vieleck ist ein durch gerade Linien vollständig eingeschlossener Teil der Ebene.

Frage 34. Wie kann man sich eine Vorstellung oder ein Bild von einem Vieleck verschaffen?

Antwort. Man kann sich eine Vorstellung oder ein Bild von einem Vieleck verschaffen, indem man in einer Ebene, z. B. der Papierebene, eine beliebige Anzahl Punkte festlegt, denselben eine bestimmte Reihenfolge beilegt, und alsdann jeden Punkt mit dem folgenden und den letzten

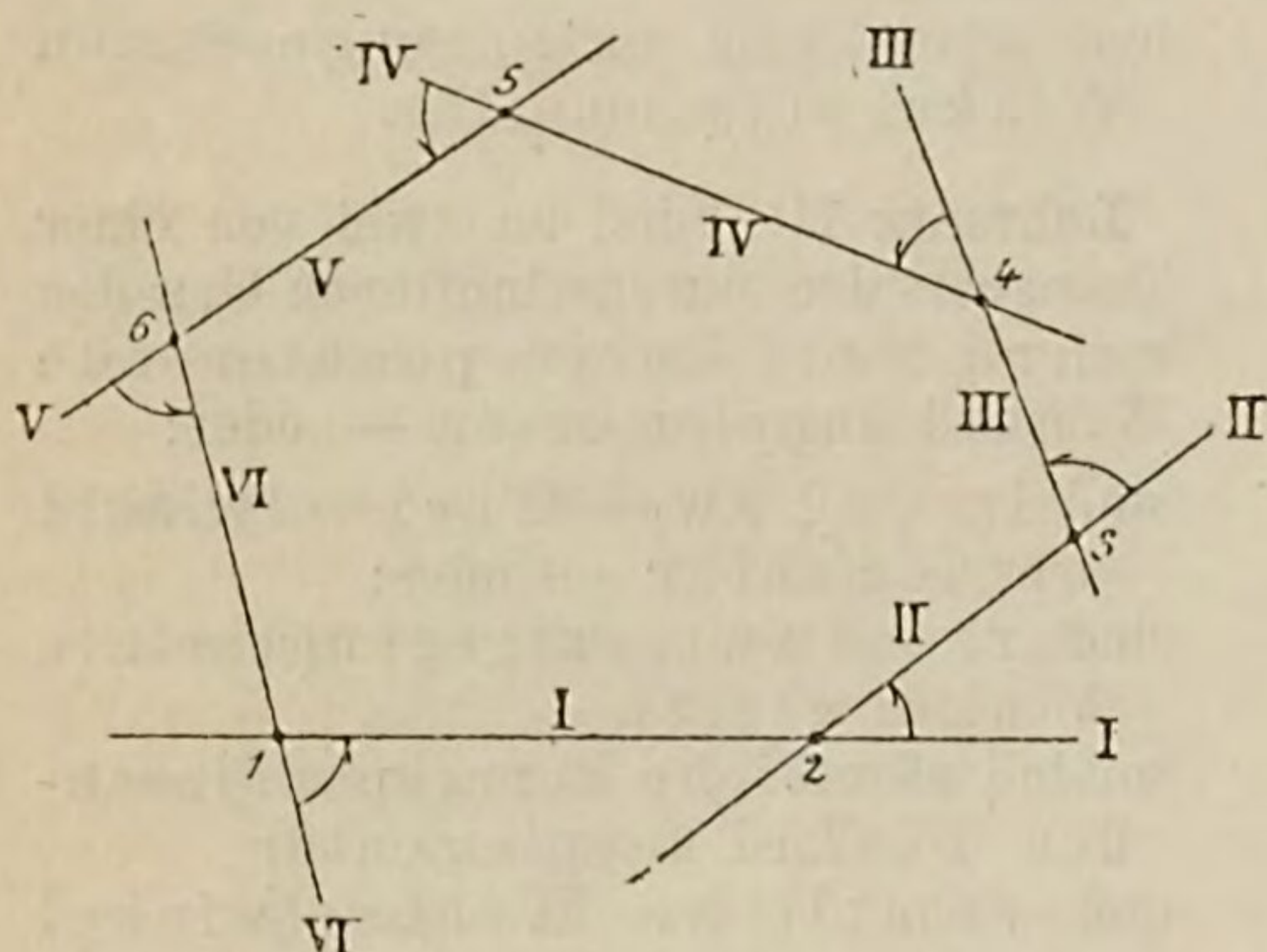
Figur 33.



Erkl. 72. Das Wort Diagonale kommt vom Griechischen $\delta\iota\alpha$ durch und $\gammaωνος$ der Winkel, bedeutet also die durch zwei Winkel des Vielecks gehende Linie.

Frage 35. Wie kann man sich ein Vieleck entstanden denken?

Figur 34.



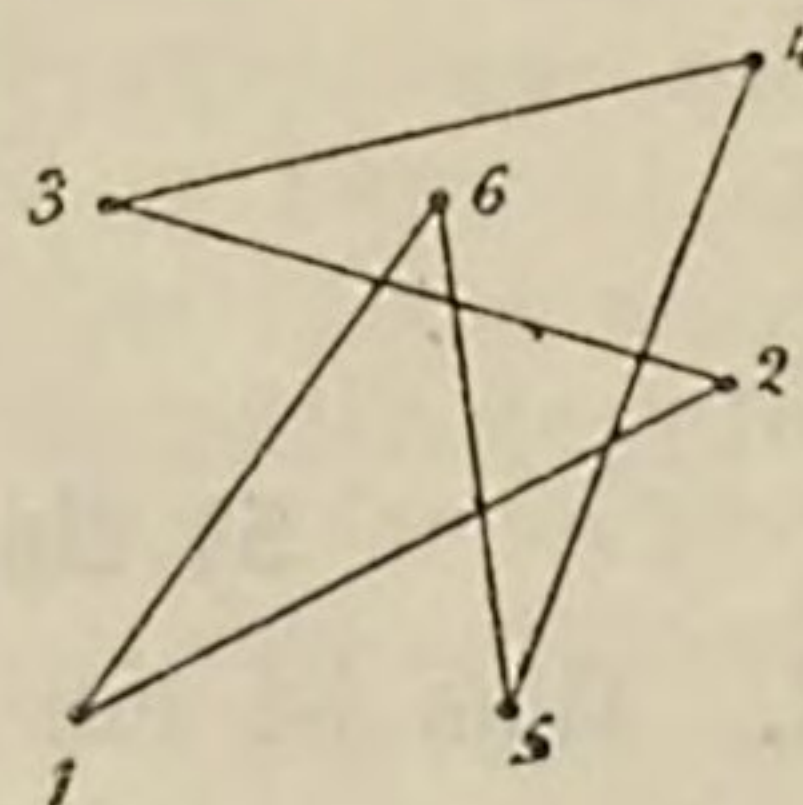
Erkl. 73. Ist die Reihenfolge der Punkte so gewählt, dass einzelne Seitenstrecken des Vielecks einander selbst durchschneiden, so heisst das Vieleck ein „überschlagenes Vieleck“ (siehe Fig. 35). Überschlagene Vielecke werden nicht in den Bereich der Betrachtungen einbezogen. Bei denselben ist nicht ein bestimmter Teil der Ebene eingeschlossen, sondern das Innere des Vielecks besteht aus mehreren getrennten Stücken, deren jedes selber ein Vieleck darstellt.

Frage 36. Zu welchen Vorstellungen gelangt man mittels der in voriger Antwort gegebenen Definition der Entstehung eines Vielecks?

mit dem ersten je durch eine gerade Linie verbindet. Der von allen diesen Verbindungslinien eingeschlossene Teil der Ebene heisst das Innere oder der Innenraum des Vielecks, die Punkte heissen die Ecken, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ecken begrenzten Strecken auf den Verbindungslinien heissen die Seiten od. Seitenstrecken des Vielecks. Die Verbindungslinien zweier nicht aufeinanderfolgender Ecken heissen Diagonalen.

Antwort. Ein Vieleck kann man sich entstanden denken, indem man eine durch zwei Punkte 1 und 2 bestimmte gerade Linie aus ihrer ursprünglichen oder ersten Lage um einen der beiden auf ihr liegenden Punkte nach einem weiteren dritten Punkte dreht, dann sie aus dieser zweiten Lage durch Drehung um den genannten dritten Punkt nach einem weiteren vierten Punkt in eine dritte Lage überführt, und so weiter in eine vierte Lage, und weiter dreht, bis man durch eine letzte Drehung um den ersten der in der ursprünglichen geraden Linie gelegenen Punkte die bewegliche Linie wieder in ihre erste Lage übergeführt hat (siehe Figur 34).

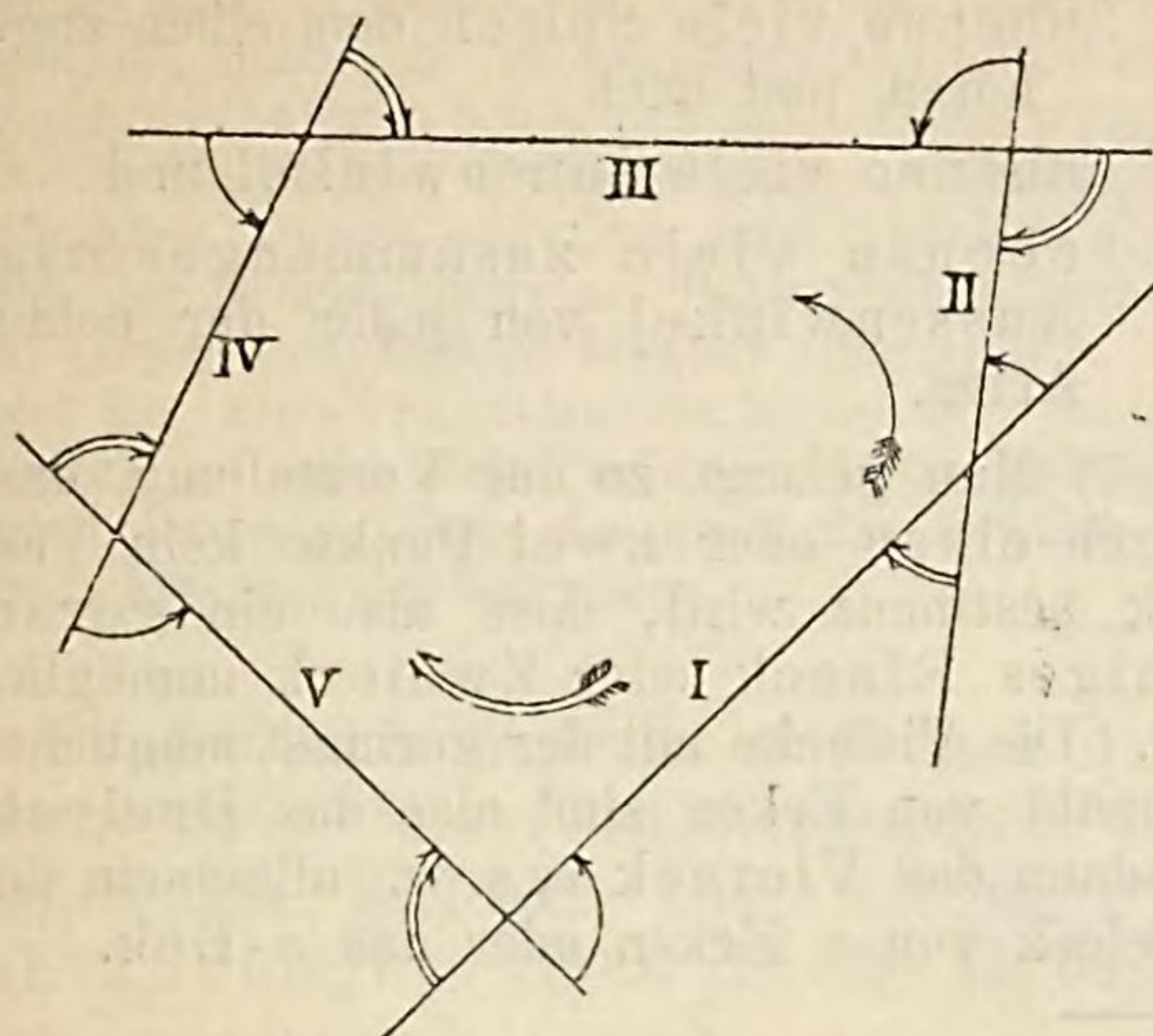
Figur 35.



Antwort. Mittels der in voriger Antwort gegebenen Definition der Entstehung eines Vielecks gelangt man zu folgenden Vorstellungen:

1) Man gelangt zu der Vorstellung, dass ein und dasselbe Vieleck entstanden sein kann nicht nur durch Drehung der ursprünglichen Geraden aus ihrer ersten Lage in die zweite, dann in die dritte, und so

Figur 36.



Erkl. 74. Die beiden Aussenwinkel sind als Scheitelwinkel einander gleich, werden aber in entgegengesetztem Drehungssinn durchlaufen (siehe Fig. 36); als Nebenwinkel eines Innenwinkels beträgt jeder Aussenwinkel zusammen mit dem an der gleichen Ecke liegenden Innenwinkel 180° .

Erkl. 75. Es sind also in Figur 36 zusammengehörige Aussenwinkel der ersten Art alle mit einfachem Bögen bezeichneten, der zweiten Art alle mit doppeltem Bögen bezeichneten.

weiter bis zur vorletzten und letzten Lage, sondern dass die Gerade auch von der mit der letzten Lage identischen ersten Lage in die vorletzte, zweitletzte, drittletzte Lage hätte gedreht werden können, und so weiter bis in die dritte, zweite und wieder erste Lage (siehe Fig. 36).

2) Man gelangt zu der Vorstellung, dass die jeweiligen Drehungsrichtungen, welche die das Vieleck erzeugende Gerade bei der ersten oder bei der soeben beschriebenen zweiten Erzeugungsweise des Vielecks zu durchlaufen haben würde, stets die entgegengesetzten sind, gerade wie die positive und negative Drehungsrichtung eines Winkels (siehe Antw. 4 und Erkl. 12 bis 15).

3) Man gelangt zu der Vorstellung, dass an jeder Ecke des Vielecks vier Winkel entstehen, nämlich:

- a) ein im Innern des Vielecks liegender Winkel, ein sog. Innenwinkel, dessen Schenkel je zwei aufeinander folgende Seitenstrecken des Vielecks sind,
- b) der Scheitelwinkel des vorigen ausserhalb des Vielecks, dessen Schenkel die beiden Verlängerungen je zweier aufeinander folgenden Vielecksseiten sind,
- c) und d) die Nebenwinkel dieser beiden Winkel, genannt Aussenwinkel des Vielecks, deren Schenkel jeweils die eine Vieleckseite und die Verlängerung der andern bilden.

4) Man gelangt zu der Vorstellung, dass die das Vieleck erzeugende Linie je nach ihrer Umlaufrichtung an jeder Ecke entweder den einen oder den andern der beiden an je einer Ecke liegenden Aussenwinkel durchläuft, dass also von den sämtlichen Aussenwinkeln des Vielecks je einer an jeder Ecke zur einen, jeder andere an jeder Ecke zur andern Erzeugungsweise des Vielecks anzurechnen ist. Die Gesamtheit der zu einer bestimmten der beiden Erzeugungsweisen zugehörigen Aussenwinkel nennt man die zusammengehörigen Aussenwinkel des Vielecks.

5) Man gelangt zu der Vorstellung, dass durch Durchlaufung aller zu einer bestimmten Erzeugungsweise gehörigen Aussenwinkel die erzeugende Gerade wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehrt ebenso wie eine Linie, welche einen Vollwinkel beschreibt (siehe Antwort 14).

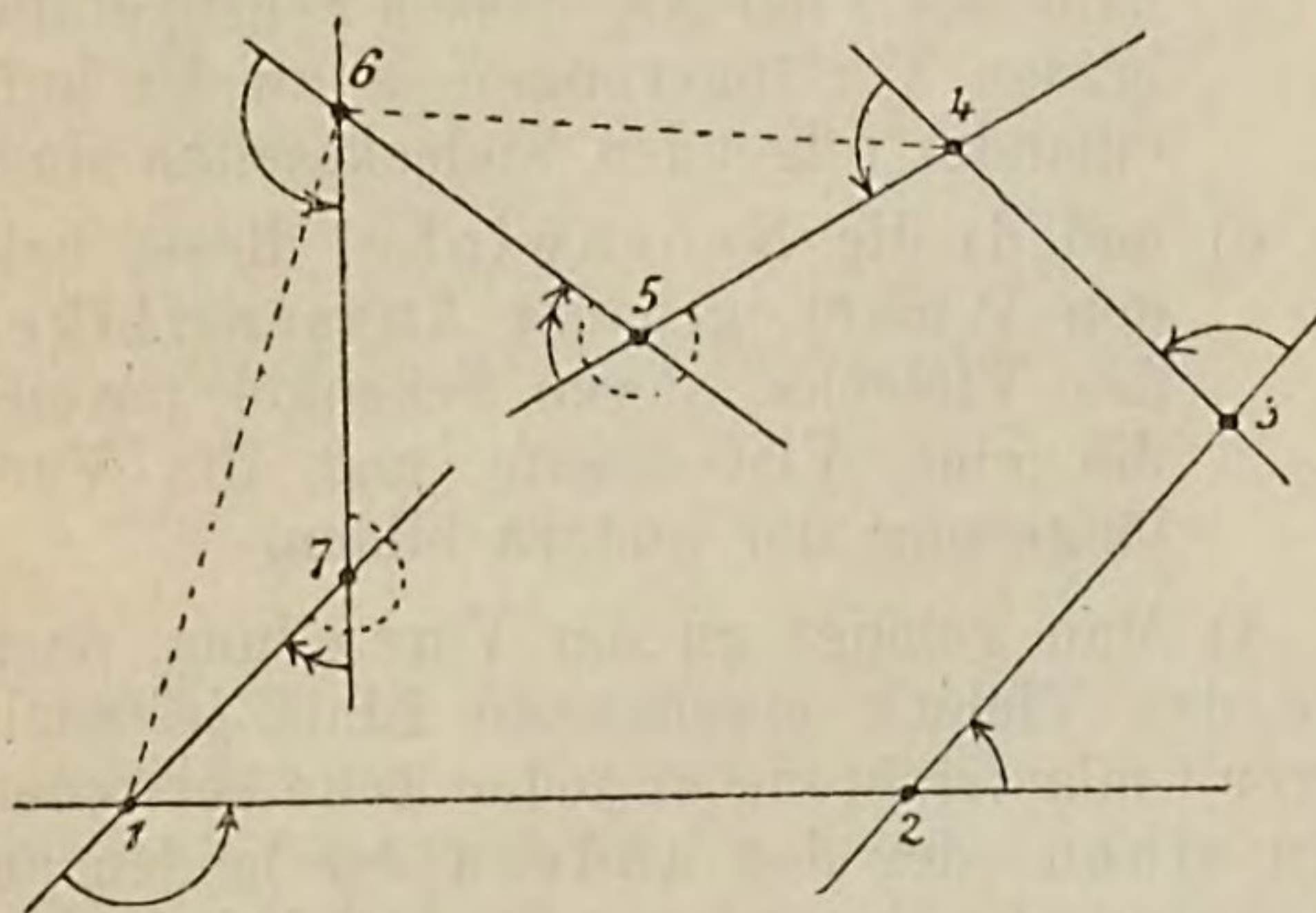
6) Man gelangt zu der Vorstellung, dass ein Vieleck eindeutig bestimmt ist durch Festlegung seiner Eckpunkte, und dass

Erkl. 76. Ueber die Anzahl der Diagonalen, sowie der übrigen Schnittpunkte der Seiten und der Diagonalen sehe man die Aufgabensammlung am Ende dieses Teils sowie die über „Vollständige Vielecke“ handelnden Teile in den „Lehrbüchern der Geometrie der Lage“ aus Kleyers Encyklopädie.

Erkl. 77. Zwei gerade Linien grenzen keinen vollständig abgeschlossenen Flächenteil ein (siehe Erkl. 6), wohl aber kann das durch zwei krumme Linien geschehen, z. B. beim sphärischen Zweieck (siehe die hierüber handelnden Teile in „Láska, Lehrbücher der sphärischen Trigonometrie“).

Frage 37. Was kann man auf Grund der in voriger Antwort 36 gewonnenen Vorstellungen über die Winkel eines Vielecks für Aussagen machen?

Figur 37.



Erkl. 78. Sind die zusammengehörigen Aussenwinkel alle in der gleichen Drehungsrichtung durchlaufen (s. Figur 34), so sind ihre Nebenwinkel, die Innenwinkel auch alle konkav. Sie heissen alsdann ausspringende Winkel und es fallen dabei die Verlängerungen sämtlicher Vielecksseiten ausserhalb und alle Diagonalen innerhalb des Vielecks.

Sind aber die zusammengehörigen Aussenwinkel nicht alle in der gleichen Drehungsrichtung durchlaufen (s. an den Ecken 5 und 7 in Figur 37), so entstehen an diesen Ecken konvexe Innenwinkel. Diese heissen einspringende Winkel und es fallen dabei die Verlängerungen der an diesen einspringenden Winkeln zusammentretenden Vielecksseiten innerhalb, dagegen die Diagonalen der benachbarten Ecken (4 zu 6 und 6 zu 1 in Figur 37) ausserhalb des Vielecks.

so viele Eckpunkte ein Vieleck hat, ebenso viele Seiten demselben zugehören, und auch ebenso viele Innenwinkel und ebenso viele zusammengehörige Aussenwinkel von jeder der beiden Arten.

7) Man gelangt zu der Vorstellung, dass durch einen oder zwei Punkte kein Vieleck bestimmt wird, dass also ein geradliniges Eineck oder Zweieck unmöglich ist. Die Vielecke mit der geringst möglichen Anzahl von Ecken sind also das Dreieck, alsdann das Viereck u. s. w., allgemein das Vieleck von n Ecken oder das n -Eck.

Antwort. Auf Grund der in den vorigen Antworten enthaltenen Vorstellungen über die Entstehungsweise und über die Winkel eines Vielecks kann man folgende Aussagen machen:

1) Ueber die Drehungen der ein Vieleck nach der einen oder andern Weise erzeugenden geraden Linie kann man aussagen, dass sie zusammen eine volle Umdrehung oder 360° betragen, also

Lehrsatz 12. Die Summe der zu einer Erzeugungsweise zusammengehörigen Aussenwinkel eines Vielecks beträgt 360° oder vier Rechte.

2) Ueber die Aussen- und Innenwinkel eines Vielecks kann man aussagen, dass sie als Nebenwinkel ebenso oft zusammen 180° betragen, als das Vieleck Ecken hat, also beim n -Eck an allen n Ecken zusammen $n \cdot 2$ Rechte. Da aber nach Lehrsatz 12 von diesen $2 \cdot n$ rechten Winkeln 4 Rechte auf die Aussenwinkel allein entfallen, so bleibt der Rest von $2n$ Rechten minus 4 Rechten oder $(2n - 4) R$ für die Innenwinkel allein übrig, also

Lehrsatz 13. Die Summe der Innenwinkel eines Vielecks von n Ecken beträgt $(2n - 4) R$ oder $(2n - 4) \cdot 90^\circ$ oder $(n - 2) 180^\circ$.

Erkl. 79. Für Vielecke mit einspringenden Winkeln gelten die Lehrsätze 12 und 13 ebenfalls, indem die in negativer Drehungsrichtung durchlaufenen Aussenwinkel auch als negative in die Summe der sämtlichen Aussenwinkel eintreten. Dieser negative Aussenwinkel aber wird von einem konvexen Innenwinkel gerade um einen gestreckten Winkel übertroffen, so dass die algebraische Summe der beiden Winkel an jeder Ecke wieder 180° beträgt. Durch letzteren Satz ist auch die Gültigkeit des Lehrsatzes 13 bewiesen.

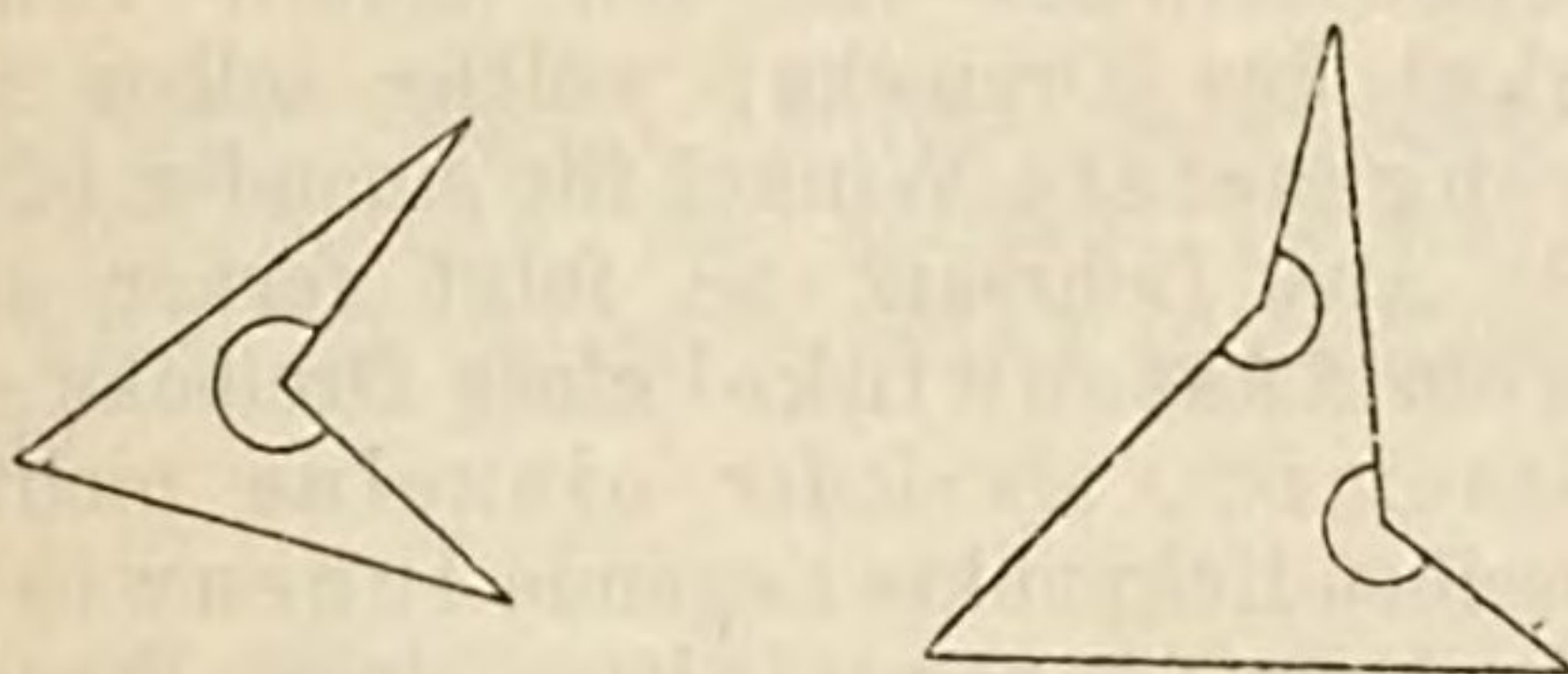
Frage 38. Welches sind nach dem Lehrsatz 13 die Winkelsummen der einfachsten Vielecke und welche Beschränkungen treten für die Grösse der Innenwinkel ein?

Erkl. 80. Die nebenstehenden Zahlen erhält man entweder, indem in die Formel des Lehrsatzes 13 für n die Eckenzahl des betrachteten Vielecks eingesetzt wird, oder durch Wiederholung der Ueberlegung in zweiten Absätze der vorigen Antwort für jedes einzelne Vieleck. Dass im n -Eck höchstens $n - 3$ einspringende Winkel vorkommen können, folgt aus der Winkelsumme:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = (n - 3) 180 + 180$$

Was nämlich jeder der ersten $n - 3$ Winkel über 180° haben soll, muss von den letzten 180° abgeben, so dass kein Rest über 180° mehr bleiben kann.

Figur 38.



Erkl. 81. Vielecke mit einspringenden Winkeln werden ausser in Bezug auf diese Festsetzungen über ihre Winkelsumme ebenso von den Betrachtungen der elementaren Planimetrie ausgeschlossen, wie die überschlagenen Vielecke (s. Erkl. 73).

Frage 39. Was lässt sich auf Grund der beiden letzten Antworten aussagen über das Dreieck im einzelnen?

Erkl. 82. Sind also in einem Dreieck zwei Winkel bekannt, so kennt man auch den dritten, nämlich $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

Antwort. Nach Lehrsatz 13 ist die Summe der Innenwinkel beim

Dreieck: $2 R = 1 \cdot 180^\circ = 180^\circ$,

Viereck: $4 R = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$,

Fünfeck: $6 R = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$,

Sechseck: $8 R = 4 \cdot 180 = 720^\circ$, u. s. w.

allgemein

n -Eck: $(2n - 4) R = (n - 2) 180^\circ$.

Daraus ergibt sich, dass Winkel von 90° oder mehr höchstens vorkommen können beim

Dreieck: ein rechter oder ein stumpfer und dazu zwei spitze Winkel,

Viereck: vier rechte oder dreistumpfe und ein spitzer Winkel;

und Winkel über 180° oder einspringende Winkel können höchstens vorkommen beim

Dreieck: keiner,

Viereck: einer (siehe Figur 38),

Fünfeck: zwei (siehe Figur 38),

n -Eck: $n - 3$.

Antwort. Für das Dreieck folgt aus dem Vorhergehenden:

Lehrsatz 14. Die Summe der Innenwinkel jedes Dreiecks beträgt 2 Rechte oder 180° .

Erkl. 83. Entfällt auf einen der drei Dreieckswinkel schon 90° oder mehr von der im ganzen nur 180° betragenden Winkelsumme, so bleibt für die beiden andern zusammen nur 90° oder weniger übrig, also kann einer allein nicht mehr 90° erreichen.

Im Gegensatze zum rechtwinkligen Dreieck heissen das spitzwinklige und das stumpfwinklige Dreieck gemeinsam auch „schiefwinkliges Dreieck“ (s. Antwort 3c auf Frage 19).

Erkl. 84. Heissen die Winkel α , β und γ , so muss:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

also γ jedesmal

$$= 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

Ist aber γ allein $= 90^\circ$, so muss:

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma = 90^\circ$$

sein.

Frage 40. Was kann man über einen Aussenwinkel eines Dreiecks im besondern aussagen?

Erkl. 85. Die Richtigkeit der in nebenstehendem Lehrsatz ausgesprochenen Behauptung kann man wie folgt darthun: Der an einer beliebigen Ecke liegende Innenwinkel wird zu 180° ergänzt 1) durch seinen Nebenwinkel, nämlich den zu betrachtenden Aussenwinkel, 2) durch die Summe der beiden andern Innenwinkel: also muss jener Aussenwinkel und diese Summe den gleichen Wert haben.

Lehrsatz 18 kann auch aus der Erzeugungsweise des Dreiecks bewiesen werden. Denn die erzeugende Gerade kann aus der Lage I in die Lage II gebracht werden, entweder auf einmal durch Drehung um den Aussenwinkel γ an der Ecke 2 (s. Figur 39) oder nacheinander durch Drehung um den Innenwinkel bei der Ecke 1 und alsdann aus der so erhaltenen Lage III wieder um den Innenwinkel bei der Ecke 3 in gleicher Drehungsweise. Da jene einzige Drehung in die gleiche Lage bringt wie diese beiden, so muss sie der Summe beider gleich sein.

Erkl. 86. Da nach Lehrsatz 14 ein Aussenwinkel $\gamma = \alpha + \beta$ ist, so muss $\alpha =$ Aussenwinkel $\gamma - \beta$ oder $\beta =$ Aussenwinkel $\gamma - \alpha$ sein.

Lehrsatz 15. Ein Dreieck kann enthalten:

- 1) drei spitze Winkel und heisst dann ein „spitzwinkliges Dreieck“ — oder:
- 2) einen rechten Winkel und zwei spitze Winkel und heisst dann ein „rechtwinkliges Dreieck“ — oder:
- 3) einen stumpfen Winkel und zwei spitze Winkel und heisst dann ein „stumpfwinkliges Dreieck.“

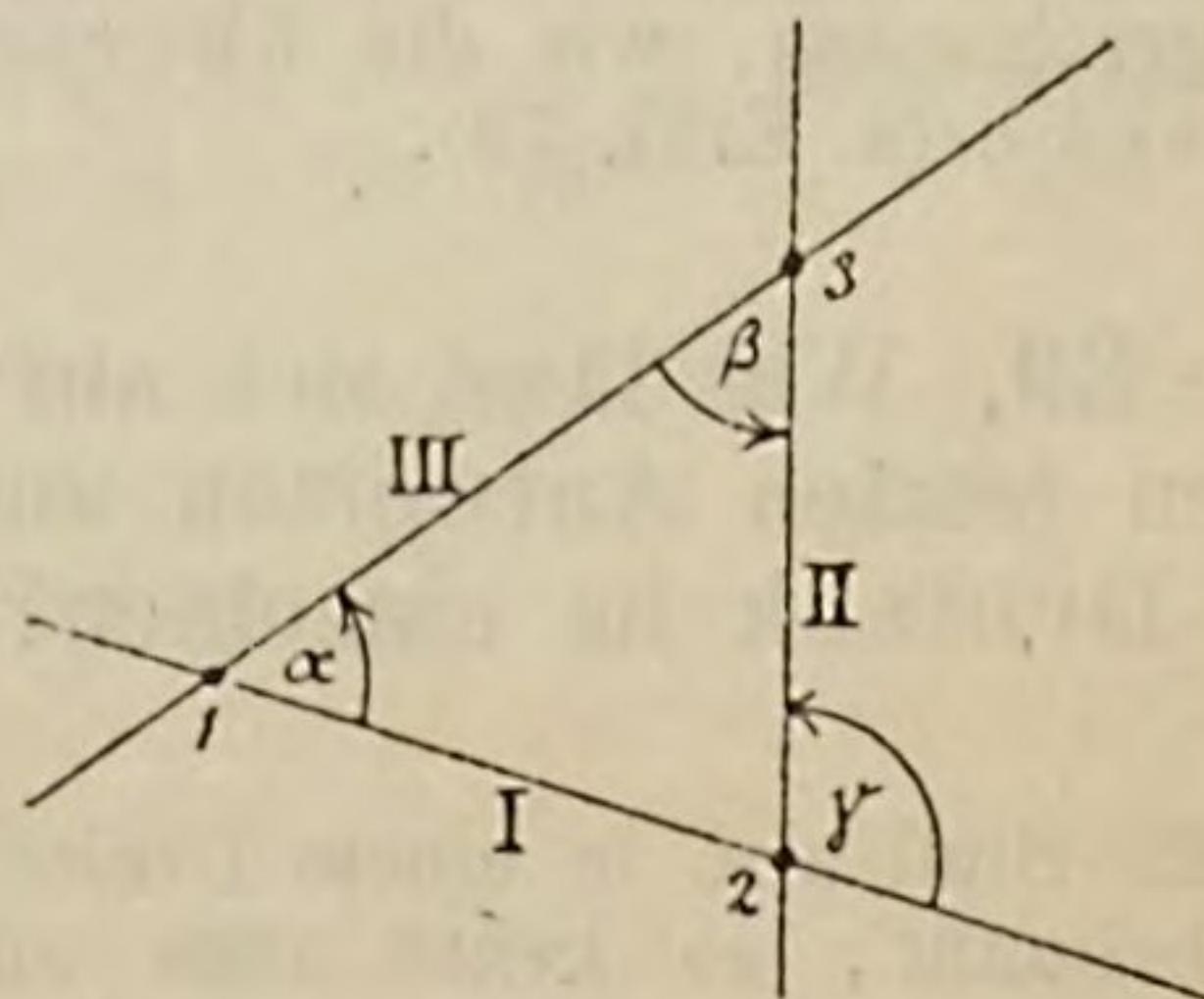
Lehrsatz 16. Stimmen mehrere Dreiecke in zwei Winkeln überein, so sind auch ihre dritten Winkel einander gleich.

Lehrsatz 17. Im rechtwinkligen Dreieck betragen die beiden spitzen Winkel zusammen 90° oder einen Rechten, sind also Komplementwinkel.

Antwort. Ueber einen Aussenwinkel eines Dreiecks kann man folgendes aussagen:

- 1) **Lehrsatz 18.** Ein Aussenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Innenwinkel, welche nicht an demselben Eckpunkte liegen.
- 2) Ein Aussenwinkel eines Dreiecks ist nach Antwort auf Frage 30 ein korrespondierender Winkel für den einen und ein Wechselwinkel für den andern Innenwinkel des Dreiecks, welche selber entgegengesetzte Winkel für einander bilden.
- 3) Aus Lehrsatz 18 folgt ferner auch, dass ein Aussenwinkel eines Dreiecks stets grösser ist, als jeder einzelne nicht an demselben Eckpunkte liegende Innenwinkel.
- 4) Jeder Innenwinkel eines Dreiecks ist die Differenz zwischen dem an einer zweiten Ecke liegenden Aussenwinkel und dem Innenwinkel an der dritten Ecke.

Figur 39.



Frage 41. Wie gestaltet sich die Anwendung der Lehrsätze 12 und 13 auf solche Vielecke, deren Innenwinkel alle einander gleich sind?

Antwort. Wenn bei einem Winkel alle Innenwinkel einander gleich sind, so müssen die Aussenwinkel als Nebenwinkel dieser gleichen Winkel ebenfalls sämtlich gleich werden, also entfällt auf jeden Aussenwinkel und Innenwinkel eines solchen n -Ecks der n -te Teil von der ganzen Summe aller Aussen- bzw. Innenwinkel. Nach Antwort auf Frage 38 erhält man daher folgende Grössen für die

	Aussenwinkel:	Innenwinkel:
für ein gleichwinkliges Dreieck . . .	$\frac{4R}{3} = 120^\circ$	$\frac{2R}{3} = 60^\circ$
Viereck . . .	$1R = 90^\circ$	$1R = 90^\circ$
Fünfeck . . .	$\frac{4}{5}R = 72^\circ$	$\frac{6}{5}R = 108^\circ$
Sechseck . . .	$\frac{2}{3}R = 60^\circ$	$\frac{4}{3}R = 120^\circ$
...	...	...
n -Eck . . .	$\frac{4}{n}R = \frac{360^\circ}{n}$	$\frac{2n-4}{n}R =$ $\left(2 - \frac{4}{n}\right)R =$ $\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180^\circ$

Erkl. 87. Die nebenstehenden Zahlen erhält man entweder, indem man in die Formel der letzten Zeile für das gleichwinklige n -Eck für n die Eckenzahl des betrachteten Vielecks einsetzt oder durch Division der in Antwort auf Frage 38 enthaltenen Zahlen durch dieselbe Zahl.

6) Ueber die Arten der Winkel beim Kreise.

Frage 42. Worauf hat man in erster Reihe zu achten, wenn ein Winkel zu einem Kreise in Beziehung tritt?

Erkl. 88. Nach Lehrsatz 29 (siehe S. 56 des ersten Teils dieses Lehrbuches) kann ein Punkt 1) innerhalb des Kreises liegen, 2) auf der Kreislinie selbst, 3) ausserhalb der Kreislinie. Und nach Antwort 50 (ebendasselbst Seite 53) kann eine gerade Linie beim Kreise sein: eine Sehne, Durchmesser, Sekante oder Tangente.

Antwort. Wenn ein Winkel zu einem Kreise in Beziehung kommt, so sind zwei Umstände zunächst festzustellen, nämlich

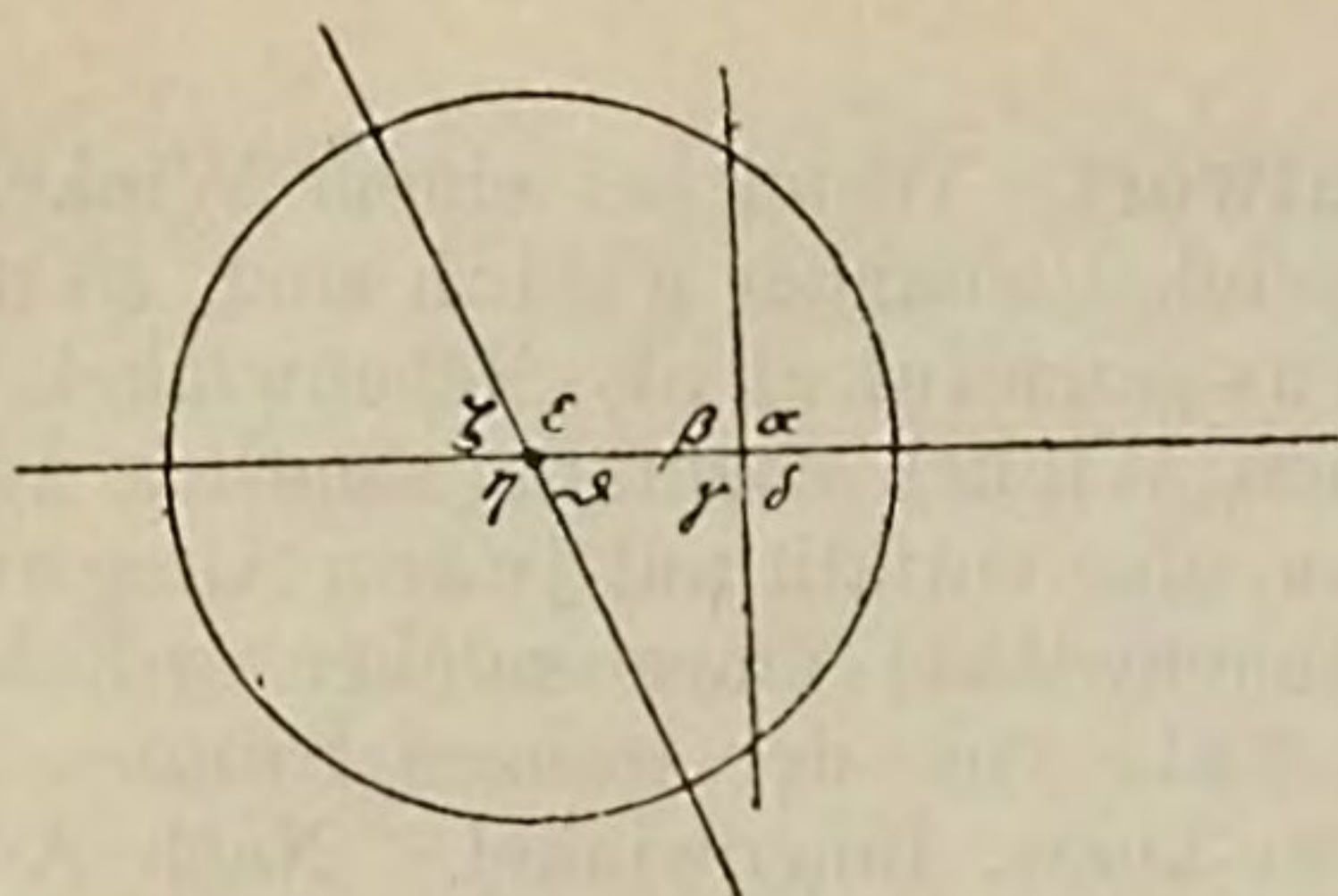
a) welche der in Lehrsatz 29 des ersten Teiles gefundenen drei möglichen Lagen zum Kreise der Scheitelpunkt des Winkels einnimmt;

b) welche der in Antwort 50 des ersten Teils angeführten Liniengattungen beim Kreise die beiden Schenkel des Winkels bilden.

Frage 43. Welche der beim Kreise möglichen Gattungen von geraden Linien können die Schenkel eines Winkels bilden, wenn dessen Scheitel innerhalb der Kreislinie liegt?

Antwort. Wenn der Scheitel eines Winkels innerhalb einer Kreislinie liegt, so sind seine beiden Schenkel Sehnen des Kreises und der Winkel heisst ein „Sehnenwinkel“.

Figur 40.

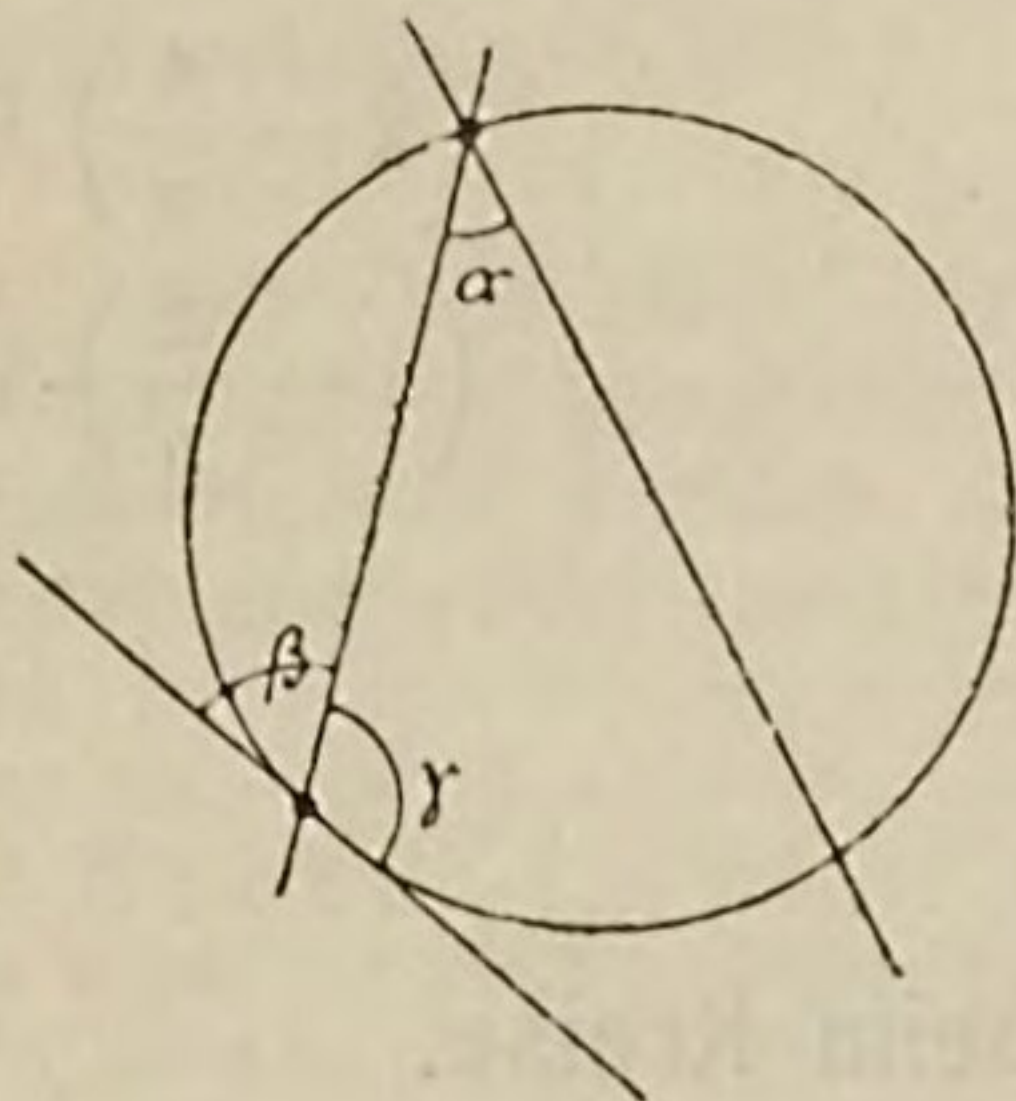


Liegt insbesondere der Scheitelpunkt des Winkels im Mittelpunkt des Kreises selbst, so sind die Sehnen, welche die Schenkel des Winkels bilden, Radien des Kreises, und der Winkel heisst in diesem Falle „Mittelpunktswinkel“ oder „Centriwinkel“ (siehe Figur 40).

Erkl. 89. In Figur 40 sind also die Winkel α , β , γ , δ , ϵ , ζ , η , ϑ sämtlich Sehnenwinkel; und unter ihnen die Winkel ϵ , ζ , η , ϑ im besonderen Mittelpunktswinkel.

Frage 44. Welche Liniengattungen beim Kreise können die Schenkel eines Winkels bilden, dessen Scheitel auf der Kreislinie selbst liegt?

Figur 41.

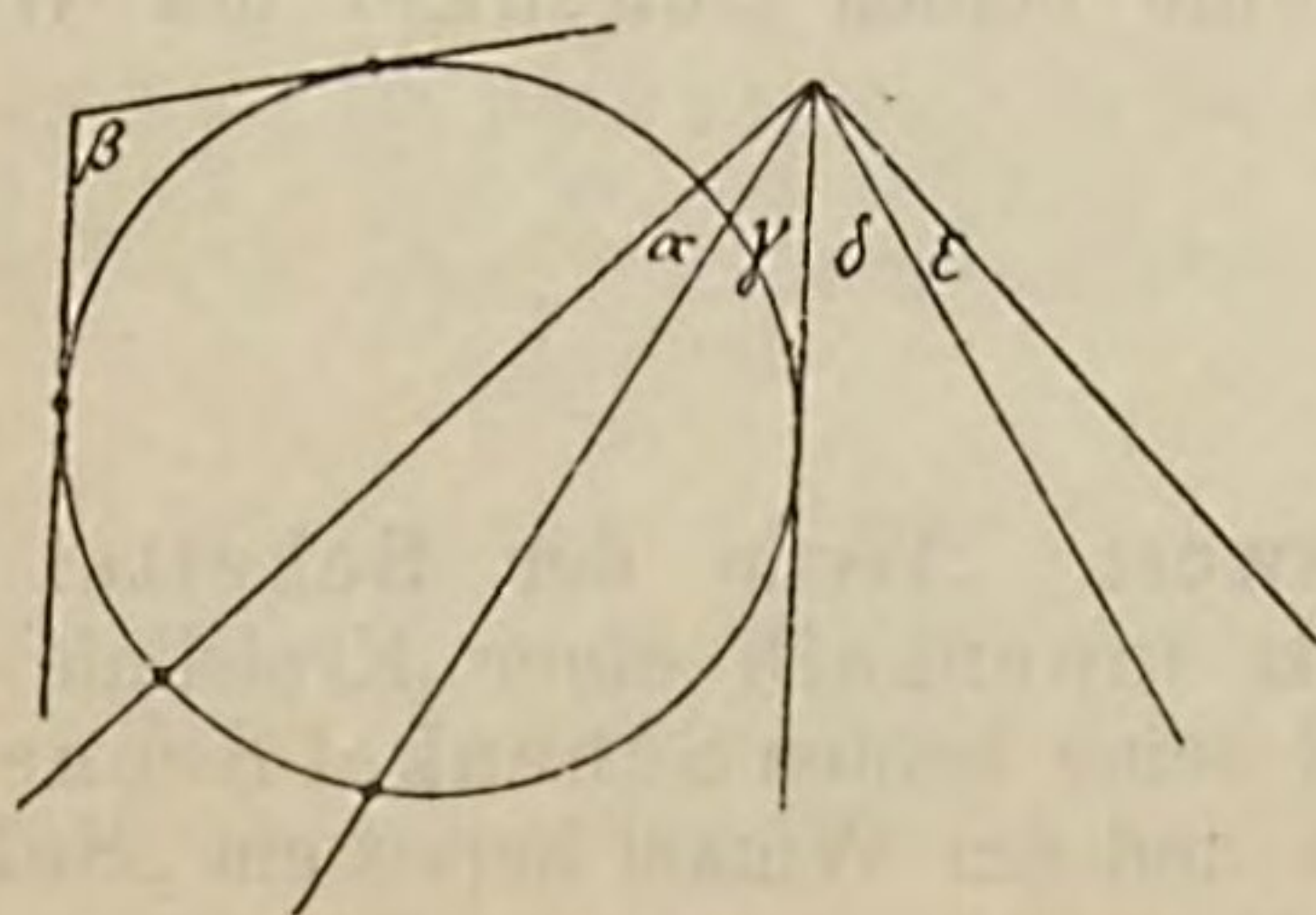


Antwort. Wenn der Scheitel eines Winkels auf einer Kreislinie selbst oder auf der Peripherie eines Kreises liegt, so heisst der Winkel ein „Peripheriewinkel“. Dabei können seine Schenkel entweder beide Sehnen des Kreises sein, oder es kann nur der eine Schenkel eine Sehne sein, der andere eine Tangente. Ein Peripheriewinkel der letzteren Art heisst „Sehnen-Tangentenwinkel“ oder „Berührungswinkel“ (siehe Figur 41 $\angle \beta$ und γ).

Erkl. 90. In Figur 41 sind also die Winkel α , β und γ sämtlich Peripheriewinkel; und unter ihnen die Winkel β und γ im besonderen „Sehnentangentenwinkel“.

Frage 45. Welche Liniengattungen beim Kreise können die Schenkel eines Winkels bilden, dessen Scheitel ausserhalb der Kreislinie liegt?

Figur 42.



Antwort. Wenn der Scheitel eines Winkels ausserhalb eines Kreises liegt, so können seine Schenkel entweder beide Sekanten des Kreises sein, und dann heisst der Winkel „Sekantenwinkel“; oder die Schenkel sind beide Tangenten des Kreises, und dann heisst der Winkel „Tangentenwinkel“; oder es ist ein Schenkel eine Sehne und der andere eine Tangente, oder der eine oder gar beide Schenkel verlaufen vollständig ausserhalb des Kreises. Für die drei letztern Gattungen des Winkels hat man keine besondere Benennungen.

Erkl. 91. In Figur 42 ist also Winkel α ein Sekantenwinkel, Winkel β ein Tangentenwinkel; die Beziehung, in welcher die Winkel γ , δ und ε zum Kreise stehen, wird nicht durch besondere Benennungen ausgedrückt.

Frage 46. Zu welchen Vorstellungen über die Beziehungen des Kreises oder der Kreislinie zu einem Winkel gelangt man nach den vorigen Erklärungen der verschiedenen Winkelgattungen?

Erkl. 92. Beim Sehnentangentenwinkel (β und γ in Figur 41) ist der Winkelscheitel selbst Schnittpunkt der Winkelschenkel mit dem Kreise und zugleich der eine Grenzpunkt des in den Winkel fallenden Bogens.

Erkl. 93. In einem Sehnenwinkel und in einem Peripheriewinkel liegt ein Bogenstück des Kreises, in einem Sekantenwinkel liegen zwei getrennte Bogenstücke, in einem Tangentenwinkel liegen auch zwei Stücke, die aber an beiden Grenzpunkten zusammenstossen und zusammen den ganzen Kreis bilden.

Erkl. 94. Für die Beziehung zwischen einem Winkel und seinem zugehörigen Bogen gebraucht man auch die Ausdrucksweise: „Der Winkel steht auf diesem Bogen“.

Frage 47. Welche besondere Beziehung besteht zwischen einem Mittelpunktswinkel und seinem zugehörigen Kreisbogen?

Erkl. 95. Der nebenstehende zweite Satz ist die genaue Umkehrung des ersten.

Antwort. Nach den in den vorigen Antworten enthaltenen Erklärungen der verschiedenen Arten von Winkeln beim Kreise und durch Betrachtung der Figuren 40, 41 und 42 gelangt man zu folgenden Vorstellungen über die Beziehungen des Kreises oder der Kreislinie zu einem Winkel:

1) Man gelangt zu der Vorstellung, dass in den Winkelraum zwischen den Schenkeln des Winkels oder zwischen den Verlängerungen derselben oder zwischen einem Schenkel und der Verlängerung des andern jeweils ein gewisser Teil der Kreisfläche oder der Kreislinie hineinfällt.

2) Man gelangt zu der Vorstellung, dass die Schnittpunkte der Winkelschenkel (oder deren Verlängerungen) mit der Kreislinie die Grenzpunkte der in dem betrachteten Winkel (oder seinem Scheitelwinkel) enthaltenen Kreisbögen bilden.

3) Man gelangt zu der Vorstellung, dass diese durch die Winkelschenkel ausgeschnittenen oder durch die Winkelschenkel eingeschlossenen Kreisbögen bei den verschiedenen Gattungen der Winkel beim Kreise in verschiedener Anzahl und Grösse entstehen. Man nennt dieselben die dem Winkel „zugehörigen“ Bögen.

Antwort. Zwischen einem Mittelpunktswinkel und seinem zugehörigen Kreisbogen lassen sich folgende besonderen Beziehungen aufstellen:

1) Indem der den Mittelpunktswinkel erzeugende Strahl sich dreht, beschreibt ein auf demselben liegender Punkt eine Bahn, welche der zu diesem Mittelpunktswinkel zugehörige Kreisbogen ist (s. Absatz 4 der Antwort auf Frage 4).

2) Zieht man von irgend zwei Punkten einer Kreislinie die Verbindungslinien nach dem Kreismittelpunkt, so schliessen diese

Erkl. 96. Die Richtigkeit des nebenstehenden dritten Satzes folgt aus der Kongruenz gleicher Winkel (siehe Lehrsatz 4) und aus der Kongruenz aller Kreislinien, deren Radien einander gleich sind (s. Lehrsatz 27 im ersten Teil).

beiden Radien denjenigen Mittelpunkts-
winkel ein, welcher auf dem zwischen
jenen beiden Punkten gelegenen Kreis-
bogenstück steht.

3) Durchläuft der den Mittelpunkts-
winkel erzeugende Strahl mehrfach nacheinander
eine gleich grosse Winkelöffnung,
so beschreibt ein auf demselben liegender
Punkt ebenso oft ein gleich grosses
Bogenstück; und umgekehrt: Verbindet
man mit dem Mittelpunkte des Kreises die
Endpunkte mehrerer gleich grossen Kreis-
bögen, so bilden die Radien jedesmal gleich
grosse Mittelpunktswinkel.

4) Durchläuft der den Mittelpunkts-
winkel erzeugende Strahl einen Vollwinkel oder
einen bestimmten Bruchteil eines solchen,
so beschreibt ein auf demselben liegender
Punkt eine vollständige Kreislinie oder
einen dem vorigen bestimmten Bruchteil gleich
grossen Bruchteil einer solchen.

Frage 48. Welche Aussagen er-
geben sich als Folgerungen aus dem,
was vorstehend über die Beziehungen
zwischen Mittelpunkts- und zu-
gehörigen Kreisbogen festgestellt
wurde?

Erkl. 97. Lehrsatz 19 und 20 bilden die
Formulierung des dritten Absatzes der vorigen
Antwort.

Erkl. 98. Die Kreisbögen, welche nach
Erkl. 51 dienen zur Bezeichnung desjenigen
Winkels zweier Strahlen, welcher zu betrachten
sei, sind nichts anderes, als die zu den Winkeln
„zugehörigen“ Bogenstücke eines Kreises
mit beliebigem Radius, aber Mittelpunkt im
Scheitelpunkt.

Erkl. 99. Aus der letzten Aussage des
dritten Absatzes nebenstehender Antwort folgt
nämlich, dass, wenn ein Mittelpunkts-
winkel n Winkelgrade zählt, dann auch der zuge-
hörige Kreisbogen n Bogengrade zählen
muss.

Erkl. 100. Auch von einem Winkel sagt
man, er liege „im ersten, zweiten u. s. w.
Quadranten“, wenn er zwischen 0° und 90° oder
zwischen 90° und 180° u. s. w. zählt.

Antwort. In Rücksicht auf das in vori-
gen Antworten gesagte kann man über die
Beziehungen zwischen einem Mittelpunkts-
winkel und dem zugehörigen Kreis-
bogen folgende Aussagen machen:

1) **Lehrsatz 19.** Zu gleichen Mittel-
punkts- und Bogenwinkeln eines Kreises gehören
gleiche Bogenstücke.

2) **Lehrsatz 20.** Zu gleichen Kreis-
bogen eines Kreises gehören gleiche
Mittelpunktswinkel.

3) Es gehört zu einem Mittelpunkts-
winkel von: als zugehöriger
Bogen:

360° oder 4 R	die ganze Peripherie
270° oder 3 R	dreiviertels Umkreis
180° oder 2 R	ein Halbkreis
90° oder 1 R	ein Viertelskreis oder ein „Quadrant“

1° oder 1 Winkelgrad: $\frac{1}{360}$ Umkreis oder
ein „Bogengrad“.

4) **Lehrsatz 21.** Die Anzahl von Winkel-
graden eines Mittelpunkts-
winkels ist gleich der Anzahl von Bogen-
graden des Kreisbogens, auf welchem
er steht — und umgekehrt.

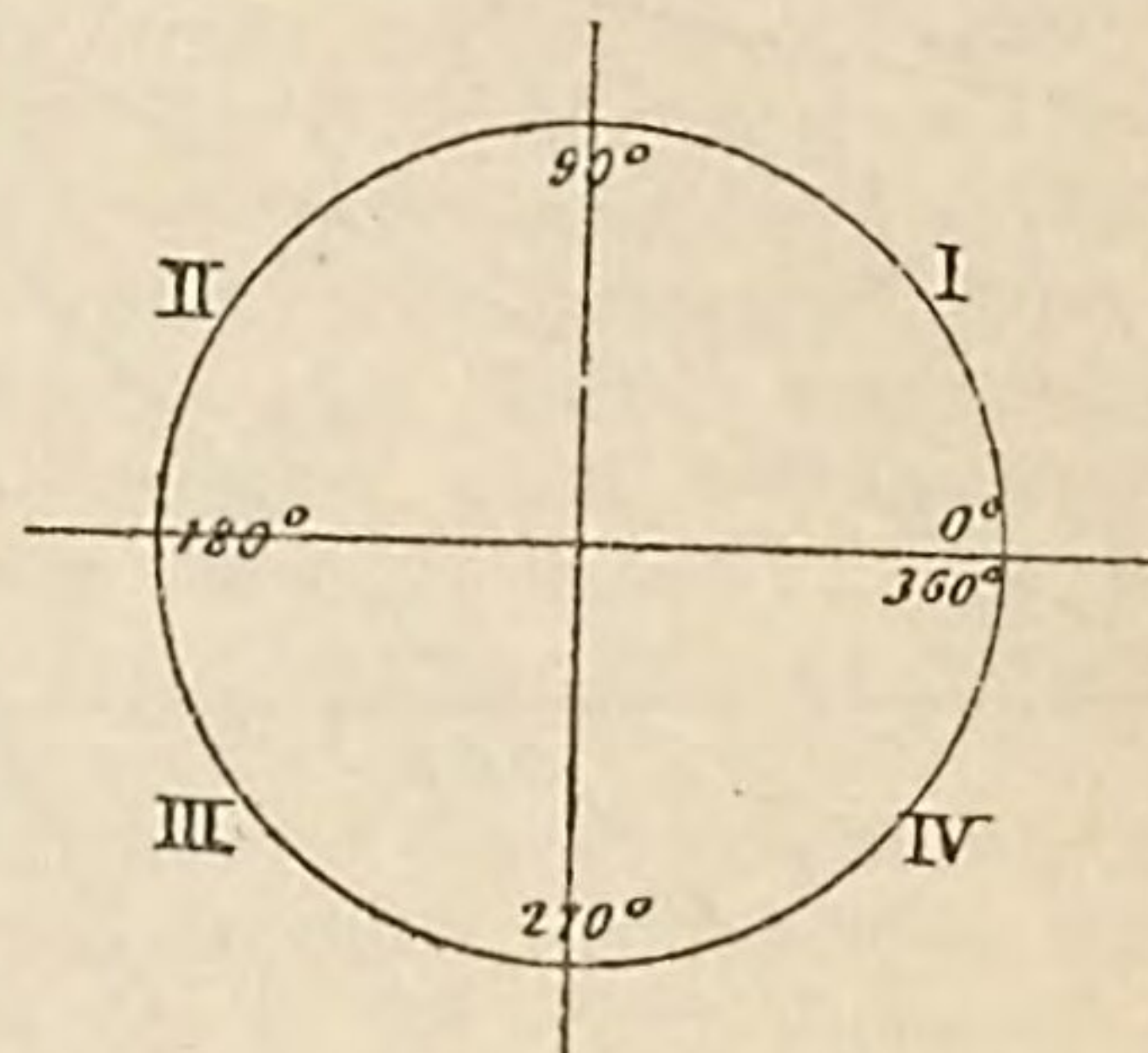
5) Zwei zu einander senkrechte Durch-
messer teilen eine Kreislinie in vier
gleichgrosse Bogenstücke. Jedes derselben

Erkl. 101. Auch bei Bogengraden hat man die Einteilung eines Bogengrades in 60 Bogenminuten, einer Bogenminute in 60 Bogensekunden, einer solchen in 60 Bogen-terzen u. s. f., wie in Erkl. 32 für die Winkelgrade angegeben ist.

Erkl. 102. Dabei ist festzuhalten, während Winkelgrade und ihre Unterabteilungen Winkelmasse sind und mit dem Winkelmesser zu messen sind, — dass Bogengrade und ihre Unterabteilungen Längenmasse sind und mit dem Längenmassstab zu messen sind, bezw. etwa mittels eines längs des Kreisbogens angelegten Fadens erst auf den geradlinigen Massstab übertragen werden. Kreisbogen von derselben Anzahl von Bogengraden sind bei grossen Kreisen (mit grossem Radius) länger als bei Kreisen mit kleinem Radius. — Man sehe über die Berechnung ihrer Längen das über Umfang und Fläche des Kreises handelnde Kapitel im VII. Teile dieses Lehrbuches.

zählt 90° Bogengrad und heisst ein Quadrant. Und zwar nennt man:
den ersten Quadranten denjenigen zwischen 0° und 90° ,
den zweiten Quadranten denjenigen zwischen 90° und 180° ,
den dritten Quadranten denjenigen zwischen 180° und 270° ,
den vierten Quadranten denjenigen zwischen 270° und 360°
(siehe Figur 43).

Figur 43.



Anmerkung Ueber die Beziehungen der andern Gattungen von Winkeln beim Kreise (ausser dem Mittelpunktswinkel), welche in den Antworten auf Frage 43 bis 45 angegeben sind, zu den ihnen zugehörigen Kreisbögen, sehe man das über den Kreis im besondern handelnde Kapitel im IV. Teil dieses Lehrbuches.

B. Ueber parallele Linien.

1) Ueber Parallel-Linien im allgemeinen.

Frage 49. Was sind parallele Linien?

Erkl. 103. Nach Erkl. 127 des ersten Teiles sind parallel die „Erzeugenden Geraden“ einer Ebene. Man vergleiche daselbst die Beziehungen zwischen zwei Parallelen und der von ihnen bestimmten Ebene (Frage 44 und 45 a. a. O.).

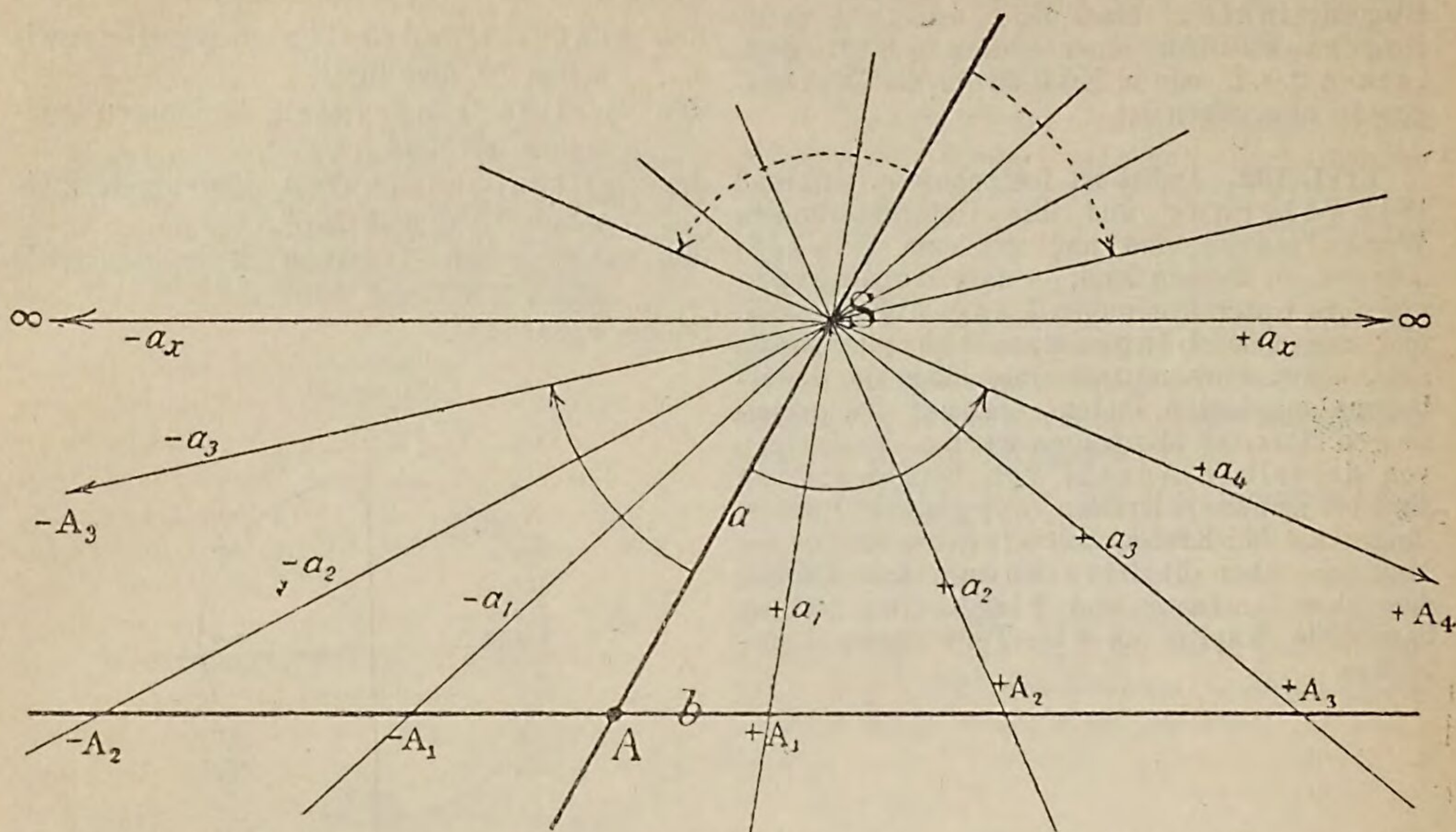
Antwort. Parallel nennt man zwei gerade Linien einer Ebene, welche keinen einzigen Punkt gemeinsam haben oder welche einander nicht schneiden, so weit man sie auch verlängern mag. Siehe Abschnitt 9 und 10 der Antwort auf Frage 42 des ersten Teiles dieses Lehrbuches.

Frage 50. Wie kann man sich zwei parallele Linien entstanden denken?

Antwort. Zwei parallele Linien kann man sich auf folgende Weise entstanden denken:

1) Man denke sich zwei beliebige gerade Linien a und b (s. Figur 44), welche sich im Punkte A schneiden. Davon sei die letztere Linie, b , festliegend, dagegen die andere, a , sei drehbar um einen auf ihr liegenden zweiten Punkt S in genau derselben

Figur 44.



Weise, wie nach Antwort auf Frage 3 der einen Winkel erzeugende Strahl s nach beiden Seiten gedreht werden konnte. Denkt man sich nun die Linie a um den Punkt S gedreht, so wird der Schnittpunkt A der Linien a und b ebenfalls seinen Platz verlassen und an eine andere Stelle dieser Linie b wandern. Und zwar wird je nach der positiven oder negativen Drehungsrichtung der Geraden um den Punkt S auch die Bewegungsrichtung des Punktes A auf der Geraden b eine positive oder negative sein.

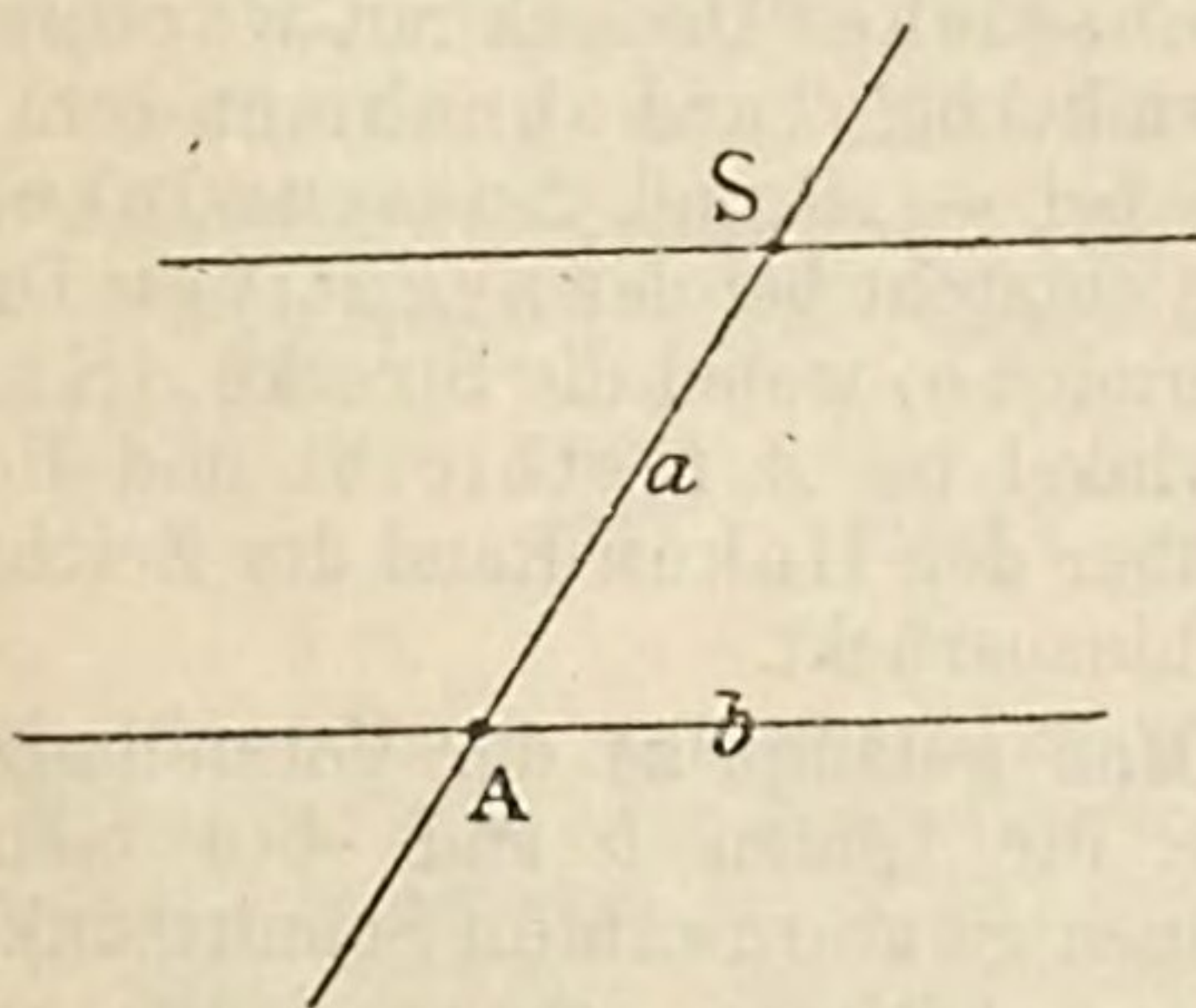
Erkl. 104. Die Richtungen zweier Linien, wie $+a_4$ und b , welche bei genügender Verlängerung einen Schnittpunkt erhalten, heissen konvergent (vom lateinischen vergere = sich neigen, also sich zusammenneigend); die entgegengesetzten Richtungen derselben Linien (also die Verlängerung der Linie $+a_4$ über S hinaus und die negative Richtung der Geraden b) heissen divergent (dis und vergere = auseinanderneigend).

2) Nimmt also die Gerade a der Reihe nach die Lagen $+a_1, +a_2, +a_3 \dots$ an, so rückt gleichzeitig der Punkt A durch die Stellen $+A_1, +A_2, +A_3 \dots$ zunächst dem rechten Rande der Zeichnungs-Ebene immer näher. Um für eine weitere Lage der gedrehten Linie a , etwa für $+a_4$, den Schnittpunkt $+A_4$ mit der Linie b zu erhalten, müsste man sich das Papierblatt nach der rechten Seite fortgesetzt denken und zwar immer weiter, je mehr die Drehung der Linie a weitergeführt wird. Die zur Erreichung des Schnittpunktes nötige Fortsetzung des Papierblattes würde immer grösser werden und zuletzt wird sie geradezu unmöglich werden, so dass man sich nur noch denken kann, den Schnittpunkt zu erreichen, wenn man die Linien b und a weit genug fortsetzen könnte.

3) Denkt man sich ebenso die Drehung der Linie a im negativen Drehungssinne

Erkl. 105. Als Zeichen, mit welchem nach einem unendlich entfernten Punkt hingewiesen wird, hat in Figur 44 der Strahl a_x beiderseits einen Pfeil mit dem Zeichen ∞ , welches „unendlich“ bedeutet.

Figur 45.



ausgeführt, so wird diese die Lagen $-a_1$, $-a_2 \dots$ erreichen und damit wird der Schnittpunkt A der Linien a und b im entgegengesetzten Bewegungssinne, als zuvor, sich durch die Stellen $-A_1$, $-A_2 \dots$ zunächst dem linken Rande der Zeichnungs-Ebene nähern und für eine Lage $-a_3$ der gedrehten Linie wieder nur durch eine vorerst (für $-A_3$) noch thatsächlich, weiter aber bloss noch denkbar mögliche Verlängerung der Linie b erreichbar sein.

4) Während so der Strahl SA der Linie a in der einen oder andern Drehungsrichtung gedreht wird, macht seine Verlängerung über den Punkt S hinaus dieselbe Drehung mit, so zwar, dass die Verlängerung des in positiver Drehungsrichtung bewegten Strahls sich immer mehr einer Lage nähert, welcher auch der in negativer Richtung bewegte Strahl zustrebt; und umgekehrt kommen sich entgegen der in positiver Richtung bewegte Strahl und die Verlängerung des in negativer Richtung bewegten Strahles. Auf beiden Seiten aber werden der in der einen Richtung gedrehte Strahl von unten her und die Verlängerung des andern von oben her zusammentreffen in einer gewissen Lage $+a_x$, $-a_x$, bei welcher der Schnittpunkt A beiderseits auch für nur zu denkende Verlängerung von a und b in unerreichbare Ferne gerückt sein wird.

5) Denkt man sich die Drehung über diese Lage hinaus fortgesetzt, so wird der Strahl $+a_x$ in eine Lage einrücken, welche zuvor die Verlängerung eines Strahls, etwa von $-a_3$, eingenommen hatte. Die Linie a also, deren Schnittpunkt mit b kurz zuvor gegen den rechten Rand der Zeichnungsebene hin und über denselben hinaus in unendliche Ferne nach rechts gerückt war, wird jetzt einen jenseits des linken Randes liegenden Schnittpunkt mit der Linie b gemeinsam haben; und umgekehrt wird der über $-A_3$ nach links in unendliche Ferne gerückte Punkt $-A_4$ auf der andern Seite innerhalb des Punktes $+A_4$ wieder erscheinen und durch die Lagen $+A_4$, $+A_3$ u. s. f. der ursprünglichen Lage A wieder zustreben.

6) Jene Grenzlage $+a_x$, $-a_x$ der Linie a , für welche der Schnittpunkt von a mit b beiderseits in unendlicher Ferne verschwunden ist, aber durch die geringste Drehung der Linie auf der einen oder andern Seite wieder zum Vorschein kommt, nennt man die parallele Lage, s. Fig. 45.

Frage 51. Zu welchen Vorstellungen gelangt man mittels der in Antwort auf Frage 50 angegebenen Erklärung der Entstehung zweier parallelen Linien?

Antwort. Mittels der in voriger Antwort enthaltenen Entstehungsweise zweier parallelen Linien gelangt man zu folgenden Vorstellungen:

1) Man gelangt zu der Vorstellung, dass mit den ursprünglichen Geraden a und b jede neue Lage der gedrehten Geraden $+a$ eine Figur bildet, an welcher nach den Antworten auf die Fragen 28 bis 30 die Gattungen der korrespondierenden Winkel, entgegengesetzten Winkel und Wechselwinkel auftreten. (S. Figur 46).

2) Man gelangt zu der Vorstellung, dass, solange ein Schnittpunkt der gedrehten Geraden $+a$ mit b vorhanden ist, ein Dreieck gebildet wird, dessen Ecken sind: die festen Punkte A , S und dieser bewegliche Schnittpunkt $+A$.

3) Man gelangt zu der Vorstellung, dass in diesem Dreieck der Winkel am Schnittpunkte von b und $+a$ gleichzeitig mit der Wanderung des Punktes $+A$ über den rechten Rand der Zeichenebene hinaus immer kleiner werden muss, während der Winkel bei A gleichbleibt und der bei S grösser wird.

4) Man gelangt zu der Vorstellung, dass jeder Nebenwinkel des Dreieckswinkels bei S , welcher Aussenwinkel dieses Dreiecks ist, immer kleiner wird, je grösser der Dreieckswinkel bei S wird, und zwar folgt aus dem vorigen Satze, dass dieser Aussenwinkel um ebensoviel abnehmen muss als der Winkel beim beweglichen Punkte $+A$ abnimmt.

5) Man gelangt zu der Vorstellung, dass ein ebensolches Dreieck mit wachsendem Innenwinkel bei S und abnehmendem Innenwinkel bei $-A$ und Aussenwinkeln bei S auch entsteht bei der negativen Drehung der Geraden a , wobei die Strecke AS und der Innenwinkel bei A festbleibt und die Ecke $-A$ über den linken Rand der Zeichenebene hinausrückt.

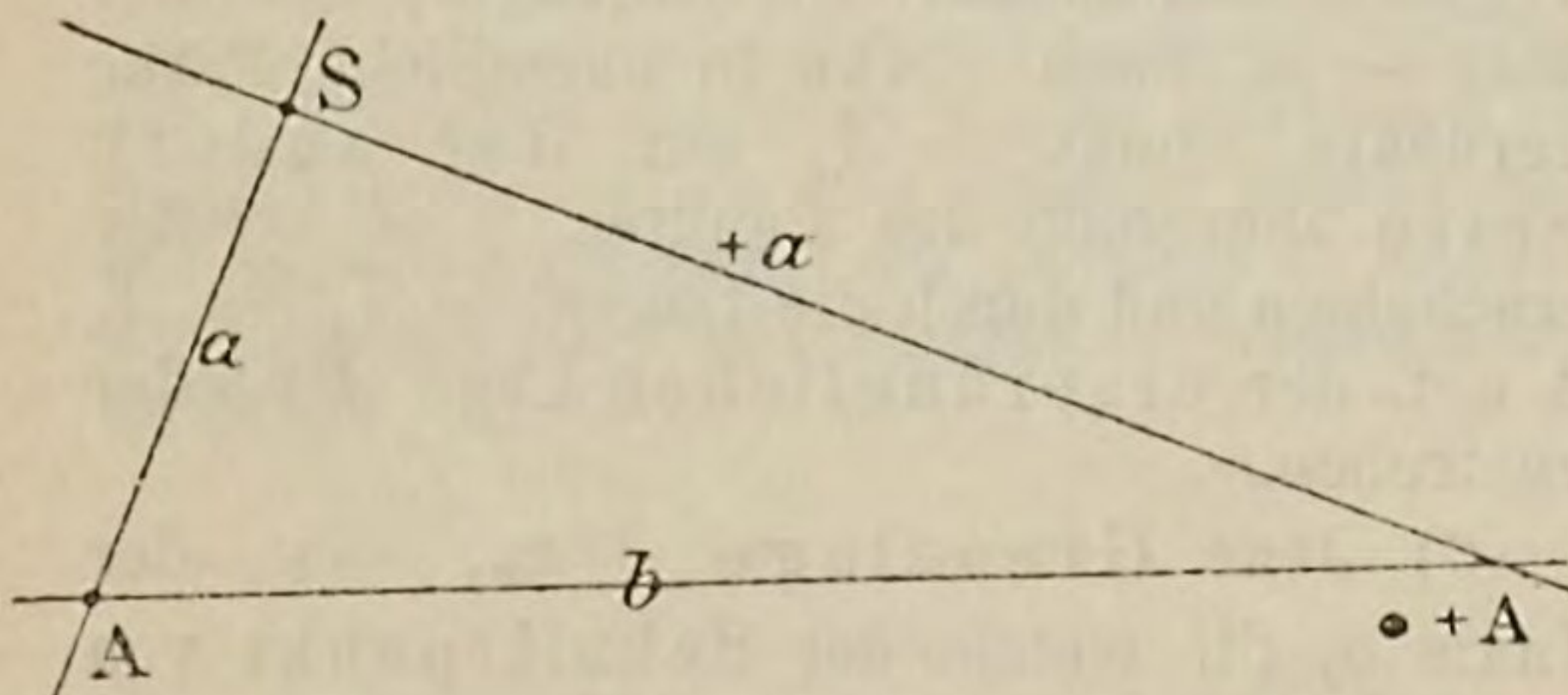
6) Man gelangt zu der Vorstellung, dass solange die Linien b und $+a$ oder $-a$ noch einen gemeinsamen Schnittpunkt $+A$ oder $-A$ besitzen, ebenso lange auch an diesem Schnittpunkte ein Winkel der beiden Geraden besteht, und dass um eben dieses Winkels Betrag

a) der dem Winkel bei A entgegengesetzte Innenwinkel bei S kleiner

Erkl. 106. Nach Lehrsatz 14 muss nämlich die Summe der drei Winkel stets 180° bleiben. Wenn also ein erster Winkel unverändert bleibt, so muss der dritte Winkel zur Ausgleichung ebenso viel ab- oder zunehmen, als der zweite zu- oder abnimmt, nämlich: Innenwinkel bei $S = 180^\circ$ minus der Summe der Winkel bei A und $+A$.

Erkl. 107. Da der Aussenwinkel nach Lehrsatz 18 gleich der Summe der beiden bei A und $+A$ liegenden Innenwinkel ist, so muss mit Abnahme dieser Summe auch der Aussenwinkel kleiner werden, nämlich Aussenwinkel bei $S = \text{Summe der Winkel bei } A \text{ und } +A$.

Figur 46.



ist, als 180° minus dem Innenwinkel bei A ;

- b) jeder der beiden Aussenwinkel bei S , von denen der eine ein korrespondierender, der andere ein Wechselwinkel ist zum Innenwinkel bei A , grösser sind als dieser Innenwinkel A .

7) Man gelangt zu der Vorstellung, dass in derjenigen Lage, bei welcher der Schnittpunkt der Geraden b und $\pm a$ in unendlicher Ferne verschwunden ist, der unmittelbar vorher an diesem Schnittpunkt noch in ausserordentlich kleiner Grösse vorhanden gewesene Innenwinkel des Dreiecks zu Null geworden ist, dass also bei der parallelen Lage

- a) die entgegengesetzten Innenwinkel bei A und S Supplementswinkel werden;
b) die korrespondierenden bzw. Wechselwinkel bei A und S einander gleich werden.

8) Man gelangt zu der Vorstellung, dass auch umgekehrt bei derjenigen Lage der gedrehten Geraden $\pm a$, in welcher entweder

- a) die entgegengesetzten Innenwinkel bei A und S Supplementwinkel werden, oder
b) die Aussenwinkel bei S dem korrespondierenden oder Wechselwinkel $=$ Innenwinkel bei A gleich werden, der dritte Dreiecks-
winkel zu Null geworden sein muss, also kein Schnittpunkt der Geraden b und $\pm a$ mehr vorhanden sein kann.

Frage 52. Was kann man in Rücksicht der soeben gewonnenen Vorstellungen, sowie der Entstehungsweise zweier Parallelen über diese Linien aussagen?

Erkl. 108. Da es nur eine einzige Lage gibt, bei welcher z. B. der Aussenwinkel bei S gleich dem Innenwinkel bei A ist, so gibt es auch nur diese einzige Lage, bei welcher der dritte Innenwinkel $= 0$ ist; und bei der geringsten Drehung aus dieser Lage erscheint wieder entweder rechts oder links ein Schnittpunkt, also auch ein von 0 verschiedener Winkel.

Antwort. In Rücksicht der im vorigen gewonnenen Vorstellungen über zwei parallele Linien sowie deren Entstehungsweise kann man folgende Aussagen machen:

Lehrsatz 22. Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden gibt es nur eine einzige parallele Gerade zu dieser.

Lehrsatz 23. Wenn an den beiden Schnittpunkten zweier Geraden mit einer dritten Transversalen

- a) zwei korrespondierende Winkel gleich oder

Erkl. 109. Die Lehrsätze 23, 24, 25 sind die Formulierung der Absätze 6 bis 8 der vorigen Antwort mit der Ausdehnung auf je zwei Winkel gleicher Gattung, welche letztere folgt aus den Lehrsätzen 10 und 11. Lehrsatz 23 findet insbesondere Anwendung zur Konstruktion von parallelen Linien: man sehe die Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teils.

Erkl. 110. Die Ausdrucksweise, dass für die parallelen Linien der Schnittpunkt in unendlicher Ferne verschwinde, würde für diesen Fall der gegenseitigen Lage zweier Linien einer Ebene eine Ausnahme festsetzen gegen das Verhalten aller sonstigen Linien einer Ebene, deren je zwei einen Punkt gemeinsam haben. Man pflegt daher auch parallele Linien als solche Linien anzusehen, welche einen Punkt gemeinsam haben und zwar einen unerreichbaren, einen „unendlich fernen Punkt“. Da aber ein solcher nach beiden entgegengesetzten Richtungen der parallelen Geraden hin anzunehmen wäre, so käme man zu dem Widerspruch, dass die parallelen Linien sogar zwei Punkte gemeinsam hätten, ohne doch zusammenzufallen (siehe Lehrsätze 2 und 3 des ersten Teils). Zur Lösung dieses Widerspruchs und in Uebereinstimmung mit den Ueberlegungen anderer Fächer der Geometrie (siehe die Lehrbücher der „analytischen Geometrie“ sowie der „Geometrie der Lage“ und der „Stereometrie“ aus Kleyers Encyklopädie) nimmt man an, dass die beiden Richtungen der parallelen Geraden zu ein und demselben unendlich fernen Punkt führen. Man schreibt demnach einer einzelnen Geraden auch nur einen einzigen unendlich fernen Punkt zu und kann daher als Bedingung des Parallelismus zweier Geraden auch aussprechen, dass sie durch den gleichen unendlich fernen Punkt gehen oder sich in einem unendlich fernen Punkt schneiden.

Erkl. 111. Um durch ein Schriftzeichen anzugeben, dass zwei gerade Linien, z. B. die Geraden a und b , parallel seien, macht man zwischen die Buchstaben der beiden Linien zwei parallele Strecken, schreibt also:

$$a \parallel b \text{ oder } a // b.$$

b) zwei Wechselwinkel gleich oder
c) zwei entgegengesetzte Winkel supplementär sind,
so sind die zwei Geraden parallel.

Lehrsatz 24. Wenn an den beiden Schnittpunkten zweier Geraden mit einer dritten Transversalen

a) zwei korrespondierende Winkel ungleich, oder
b) zwei Wechselwinkel ungleich, oder
c) zwei entgegengesetzte Winkel nicht supplementär sind,
so sind die zwei Geraden nicht parallel.

Lehrsatz 25. Wenn zwei gerade Linien parallel sind, so sind die sämtlichen an einer durchschneidenden Transversalen entstehenden

a) korrespondierenden Winkel gleich;
b) Wechselwinkel gleich;
c) entgegengesetzten Winkel supplementär.

2) Ueber besondere Fälle paralleler Linien.

Frage 53. Welche besondere Lagen kann die Transversale annehmen, welche zwei Parallelen durchschneidet?

Antwort. Von den Lagen der Transversalen, welche zwei Parallelen durchschneidet, sind besonders hervorzuheben diejenigen, bei welchen der von der Transversalen mit der einen, also nach Lehrsatz 25 auch mit der anderen Geraden gebildete Winkel einen besonderen Fall der Winkelöffnung aufweist, also entweder 0° oder

90° oder 180° beträgt. Im ersten oder letzten Falle nämlich kann die Transversale selbst keinen Schnittpunkt mit der Geraden haben, im zweiten Falle sind die vier Winkel, welche die Transversale mit einer Geraden bildet, lauter rechte Winkel.

Frage 54. Welche Folgerungen ergeben sich aus den Lehrsätzen 22 bis 25 für den Fall, dass die Transversale selbst die eine der beiden Parallelen nicht schneidet?

Antwort. Für den Fall, dass die dritte Gerade selbst die eine der beiden Parallelen nicht schneidet, nehmen die Lehrsätze 22 bis 25 folgende Gestalt an:

Erkl. 112. Die Richtigkeit der durch den Lehrsatz 26 ausgesprochenen Behauptung kann man, wie folgt, darthun:

Voraussetzung. Es seien, siehe Figur 47, a und b zwei parallele Geraden und c eine dritte Gerade, von der man weiss, dass sie zu b parallel sei (kurz: $a \parallel b$ und $c \parallel b$).

Behauptung. Es muss auch $c \parallel a$ sein.

Beweis. Angenommen die Gerade c wäre nicht parallel zu a , sondern c und a hätten einen Schnittpunkt gemeinsam, dann würden sie an diesem Schnittpunkt einen von 0° verschiedenen Winkel bilden, und nach Lehrsatz 25 müsste ein gleich grosser, also ebenfalls von 0° verschiedener Winkel auch von den Linien c und b gebildet werden. Da aber nach Voraussetzung c und b keinen Schnittpunkt haben, so ist letzteres unmöglich, also können auch c und a keinen von 0° verschiedenen Winkel bilden, das heisst, sie können sich nicht schneiden, sondern es ist auch $c \parallel a$.

Erkl. 113. Die Richtigkeit der durch den Lehrsatz 27 ausgesprochenen Behauptung kann man, wie folgt, darthun:

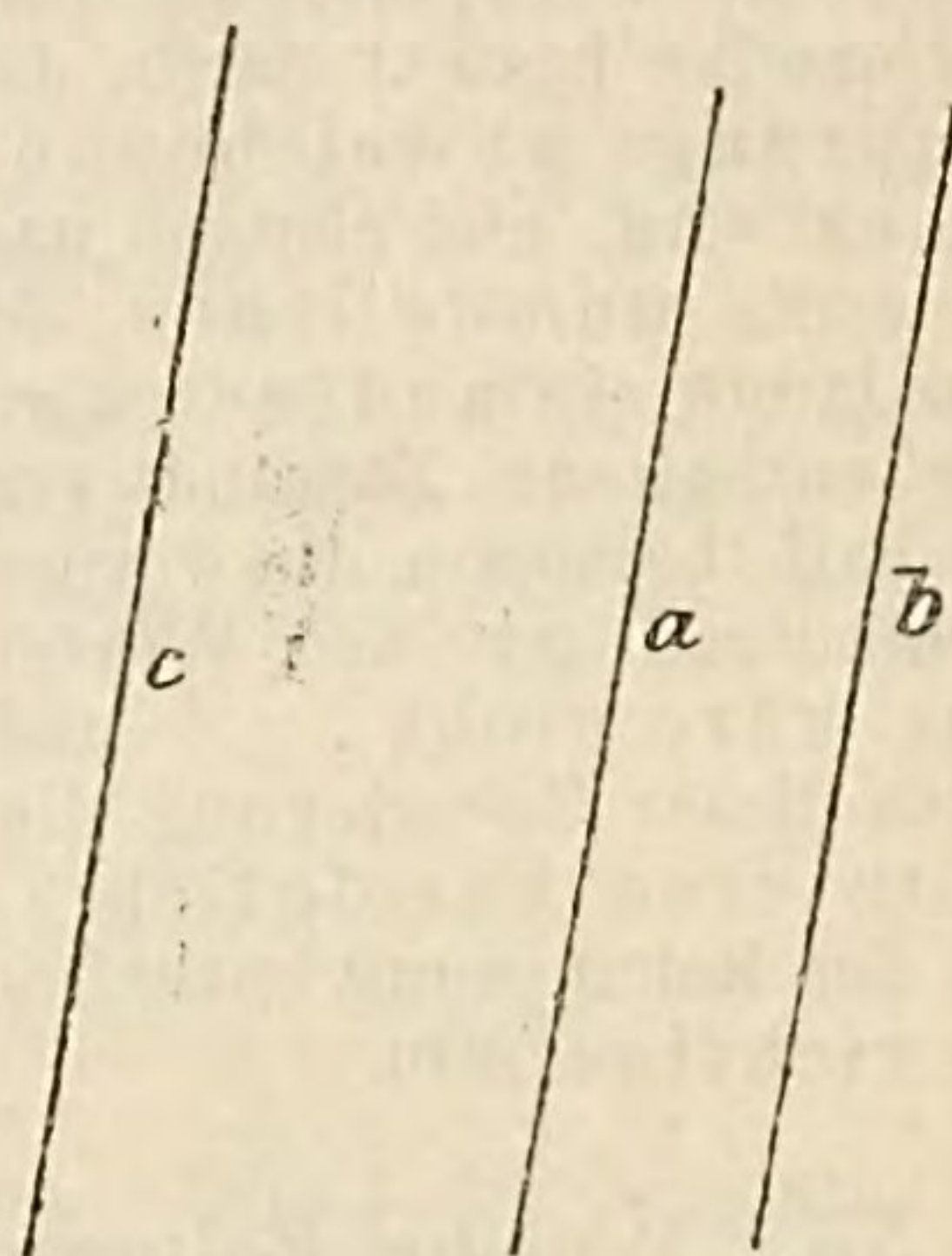
Voraussetzung. Es seien, siehe Figur 48, a und b zwei parallele Geraden und c eine dritte Gerade, von der man weiss, dass sie die Gerade a schneidet.

Behauptung. Die Gerade c schneidet (nötigenfalls bei genügender Verlängerung) auch die Gerade b .

Beweis. Angenommen die Gerade c würde die Gerade b nicht schneiden, dann wäre $c \parallel b$ und nach Voraussetzung auch $a \parallel b$. Dann wären also a und b zwei parallele Linien, zu deren einer, nämlich b , eine dritte Linie parallel wäre. Demnach müsste nach Lehrsatz 26 auch $c \parallel a$ sein. Da aber nach Voraussetzung c und a sich schneiden, so ist letzteres unmöglich, also können auch die Geraden c und b nicht parallel sein, sondern müssen sich schneiden, nötigenfalls nachdem beide Gerade genügend (aber nicht unendlich) verlängert sind.

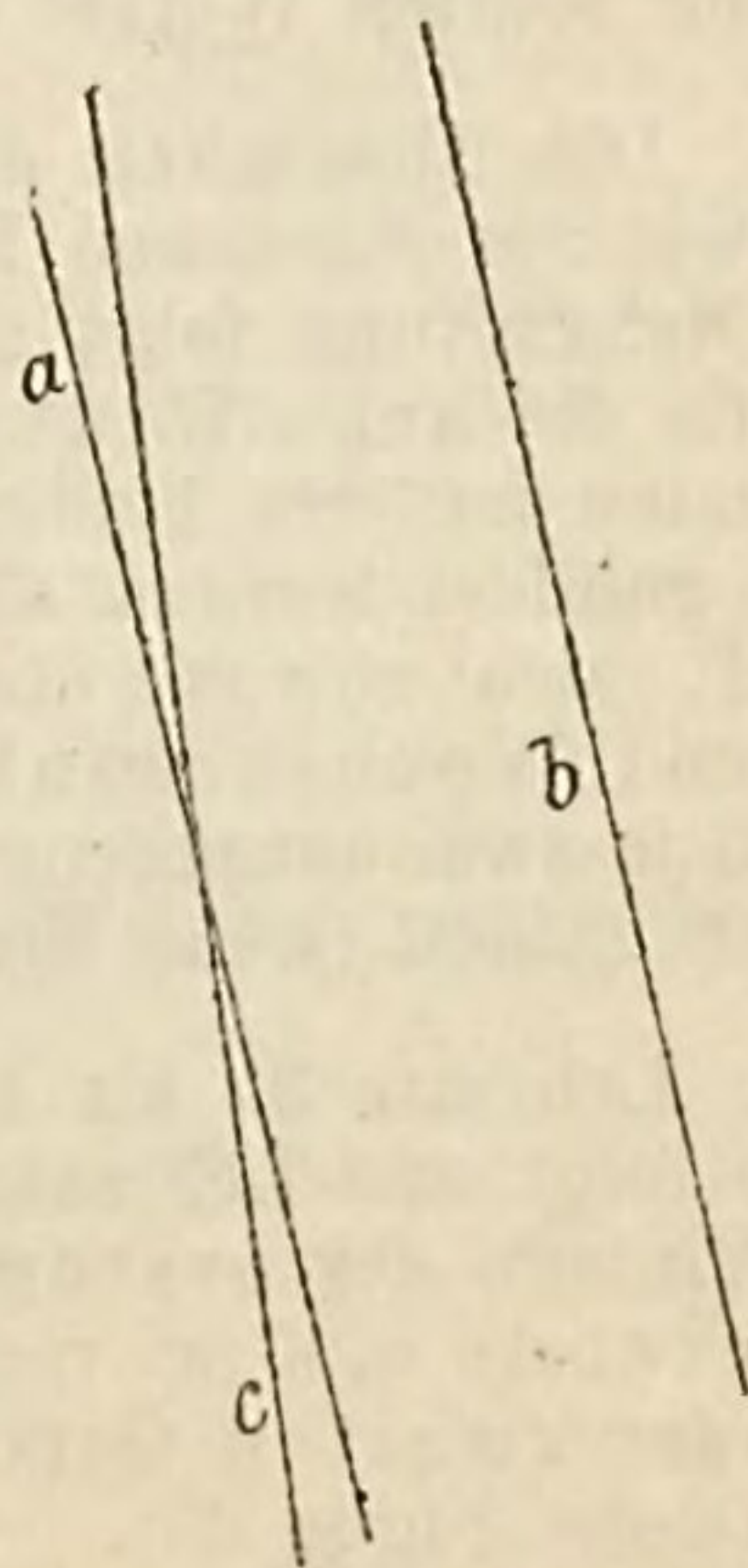
Lehrsatz 26. Wenn eine gerade Linie zu einer von zwei parallelen Geraden parallel ist, so ist sie auch zur andern parallel (s. Figur 47).

Figur 47.



Lehrsatz 27. Wenn eine gerade Linie einer Ebene die eine von zwei parallelen Geraden schneidet, so schneidet sie auch die andere.

Figur 48.



Erkl. 114. Die Richtigkeit der in Lehrsatz 28 ausgesprochenen Behauptung kann man, wie folgt, darthun.

Voraussetzung. Es seien a und b , siehe Figur 47, zwei gerade Linien, welche beide zu einer dritten c parallel sind (also $a \parallel c$ und $b \parallel c$).

Behauptung. Es ist auch $a \parallel b$.

Beweis. Angenommen es wäre nicht $a \parallel b$, sondern die beiden Linien würden sich in einem Punkte schneiden, dann wäre b eine Linie, welche die eine der beiden Parallellinien a und c schneidet. Dann müsste dieselbe Linie b nach Lehrsatz 27 auch die andere der beiden Parallelen schneiden, nämlich c . Da aber nach Voraussetzung $b \parallel c$ ist, so ist letzteres unmöglich; also kann die Linie b auch die Linie a nicht schneiden, sondern muss zu a parallel sein.

Erkl. 115. Die Art von Beweisen, welche in den drei letzten Fällen angewendet ist, heisst der indirekte Beweis, oder der umgekehrte Beweis. Derselbe besteht darin, dass ein von der Behauptung abweichender Zustand angenommen wird, und alsdann nachgewiesen wird, dass stets unmögliches sich ergeben müsste, so lange ein anderer als der in der Behauptung enthaltene Zustand vorausgesetzt würde. Deshalb beginnen die vorigen drei Beweise gleichlautend mit den Worten „Angenommen es wäre nicht ...“ und enthalten als Abschluss dieser Ueberlegung die Worte — „so ist letzteres unmöglich: also ...“ muss der in der Behauptung enthaltene Zustand der einzig richtige sein.

Frage 55. Welche Folgerungen ergeben sich aus den Lehrsätzen 22 bis 25 für den Fall, dass die Transversale zu einer der beiden Parallelen senkrecht ist?

Erkl. 116. Lehrsatz 29 folgt schon aus der Kongruenz aller rechten Winkel (s. Lehrsatz 5).

Erkl. 117. Die Richtigkeit der durch Lehrsatz 30 in zwei verschiedenen Fassungen ausgesprochenen Behauptung folgt unmittelbar aus Lehrsatz 23, da die acht Winkel, welche von den Transversalen mit den beiden auf ihr senkrechten Linien gebildet werden, sämtlich rechte Winkel sind, also sowohl die korrespondierenden und Wechselwinkel gleich 90° sind, also auch je zwei entgegengesetzte Winkel zusammen 180° zählen (siehe Figur 49).

Erkl. 118. Lehrsatz 31 als Umkehrung des Lehrsatzes 30 folgt aus Lehrsatz 25, indem zu den rechten Winkeln der ersten Geraden auch korrespondierende u. s. w. rechte Winkel am Schnittpunkt der zweiten Geraden vorhanden sein müssen (siehe Figur 49).

Lehrsatz 28. Wenn zwei gerade Linien einer Ebene zu einer und derselben dritten Geraden parallel sind, so sind sie selbst einander parallel.

Antwort. Wenn die Transversale zu einer der beiden Parallelen senkrecht ist, so ergeben sich aus den Lehrsätzen 22 bis 25 folgende Aussagen:

Lehrsatz 29. In einem Punkte gibt es auf einer Geraden in einer Ebene nur eine einzige Senkrechte.

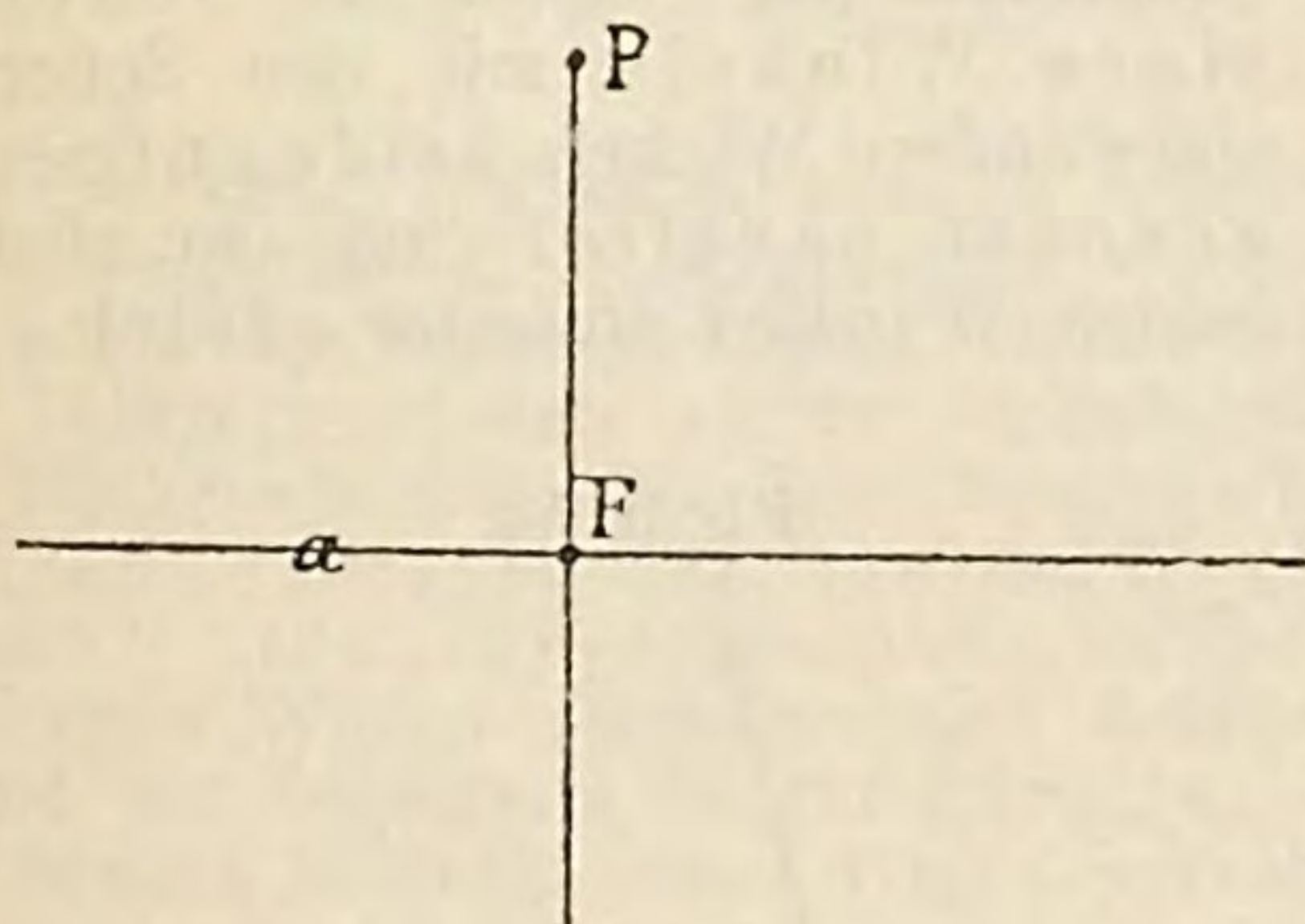
Lehrsatz 30. Zwei Gerade einer Ebene, welche auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel — oder: Alle Normalen auf einer Geraden in einer Ebene sind parallel (s. Fig. 49).

Erkl. 119. Für die Richtigkeit der in Lehrsatz 32 ausgesprochenen Behauptung kann man folgenden indirekten Beweis (siehe Erkl. 115) führen (siehe Figur 55):

Angenommen, es gäbe durch den Punkt P eine zweite Senkrechte auf die Gerade a , dann müsste diese zweite Senkrechte ebenfalls einen rechten Winkel mit der Geraden a bilden und die beiden Geraden müssten nach Lehrsatz 30 parallel sein, obgleich sie beide den Punkt P gemeinsam haben. Letzteres ist aber unmöglich, also kann es durch P keine zweite Gerade senkrecht zu a geben.

Erkl. 120. Der Punkt F , in welchem die Senkrechte von Punkt P auf die Gerade a diese Gerade durchschneidet, heisst der Fusspunkt der Senkrechten.

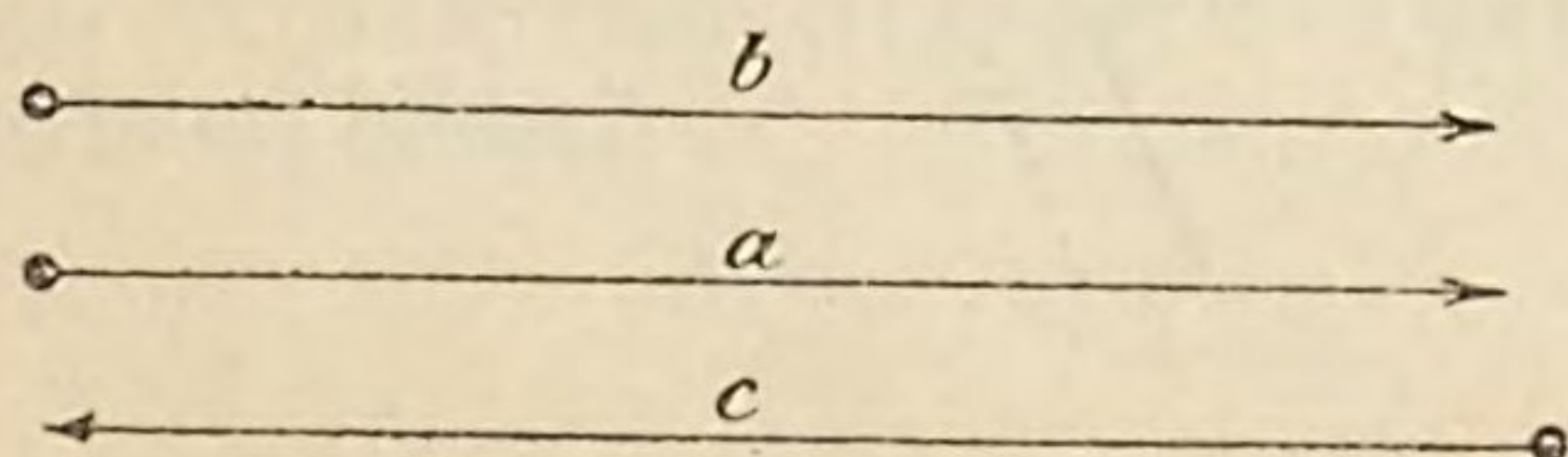
Figur 50.



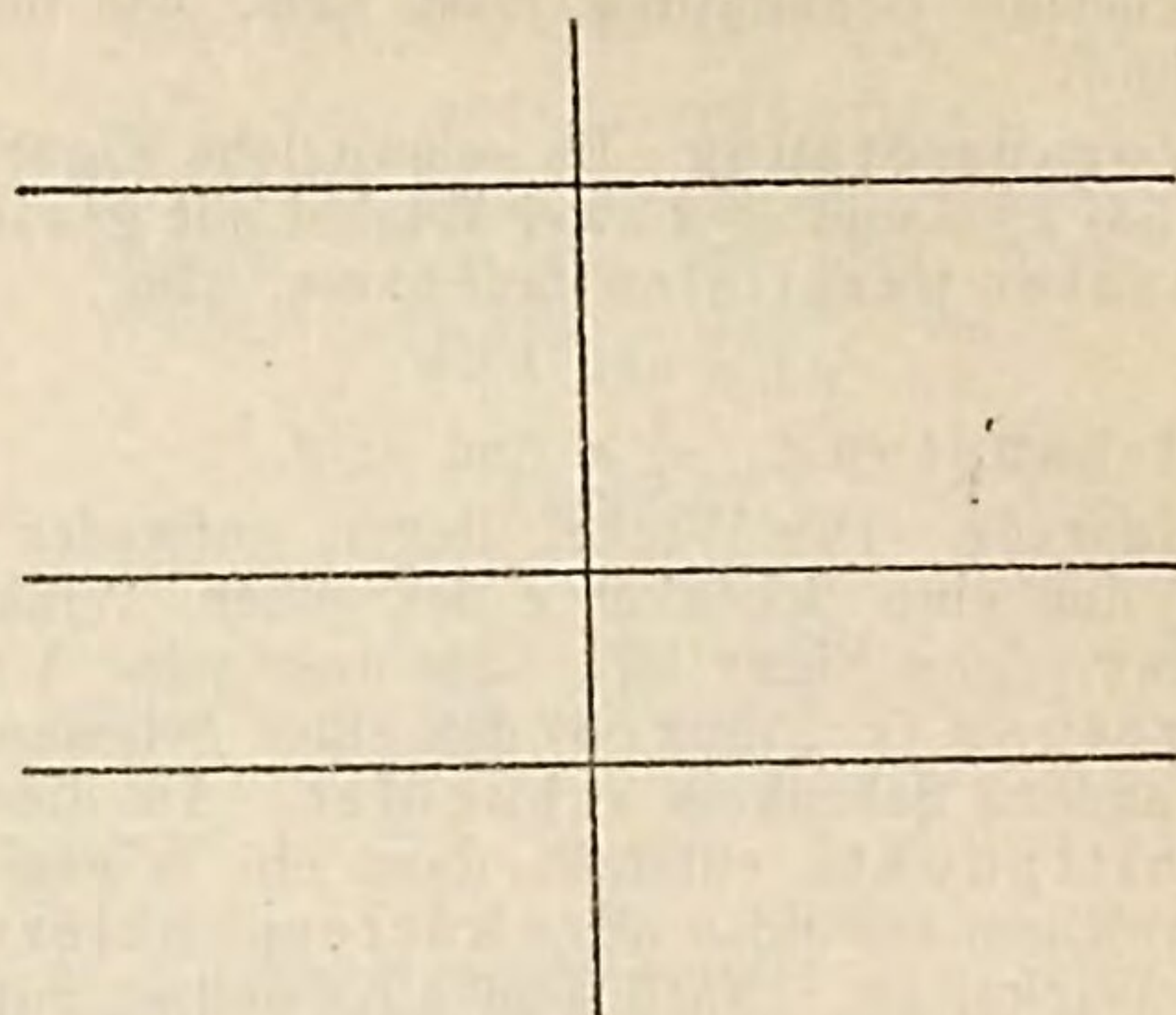
Frage 56. Welche Folgerungen ergeben sich aus den Lehrsätzen 22 bis 25 für den Fall, dass die Schenkel mehrerer Winkel parallel laufen?

Erkl. 121. Man nennt zwei Strahlen gleichgerichtet parallel oder entgegengesetzt parallel, wenn die Bewegungsrichtung von ihrem Anfangspunkte nach ihrem gemeinschaftlichen unendlich fernen Punkte die gleiche oder die entgegengesetzte ist. Es sind also in Figur 51 die Strahlen a und b gleichgerichtet parallel, die Strahlen a und c entgegengesetzt parallel. Nach Antwort auf Frage 51 und Erkl. 108 kann man auch sagen, dass gleichgerichtetparallele Strahlen einen Winkel von 0° , dagegen entgegengesetzt parallele Strahlen einen Winkel von 180° bilden.

Figur 51.



Figur 49.



Lehrsatz 31. Wenn von zwei Parallelen die eine auf einer dritten Geraden senkrecht ist, so ist dies auch die andere — oder:

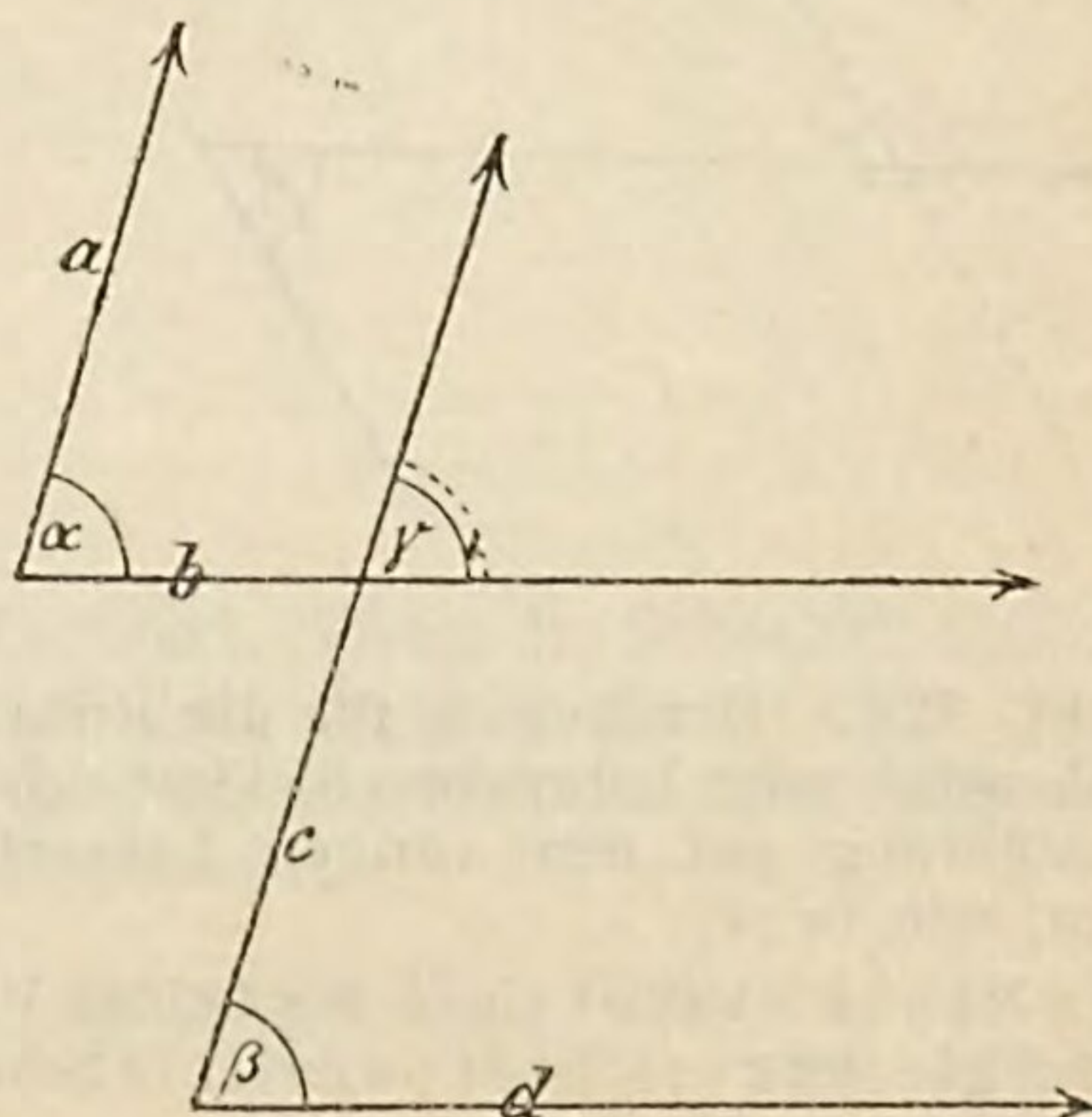
Wenn eine Gerade senkrecht ist zu der einen von zwei Parallelen, so ist sie auch zur andern senkrecht (s. Figur 49).

Lehrsatz 32. Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden gibt es nur eine einzige Senkrechte auf diese Gerade.

Antwort. Wenn die Schenkel mehrerer Winkel einzeln parallel sind, so ergeben die Lehrsätze 22 bis 25 folgende Aussagen:

Lehrsatz 33. Wenn die Schenkel eines Winkels mit den Schenkeln eines andern Winkels beide gleichgerichtet parallel sind, so sind die beiden Winkel einander gleich.

Figur 52.



Erkl. 122. Die durch den Lehrsatz 33 ausgesprochene Behauptung lässt sich, wie folgt, darthun:

Voraussetzung. Es seien (siehe Figur 52 und 53) $\sphericalangle \alpha$ und $\sphericalangle \beta$ zwei Winkel mit gleichgerichtet parallelen Schenkeln, also

$$a \parallel c \text{ und } b \parallel d.$$

Behauptung. $\sphericalangle \alpha$ und $\sphericalangle \beta$.

Beweis. Die Winkel liegen entweder so, dass der eine Schenkel c des einen Winkels selbst (siehe Figur 52), oder dass seine Verlängerung (s. Figur 53) den einen Schenkel b des andern Winkels schneidet. An diesem Schnittpunkte entsteht dann ein Winkel γ , zu welchem sowohl α als β korrespondierender Winkel ist. Nach dem allgemeinen Satze, „dass zwei Grössen unter sich gleich sind, wenn beide einer dritten gleichen“, folgt also aus

$$\alpha = \gamma \text{ und } \beta = \gamma, \text{ dass auch } \alpha = \beta.$$

Erkl. 123. Der Beweis für die Richtigkeit des Lehrsatzes 34 lässt sich ganz ebenso führen, wie der vorige.

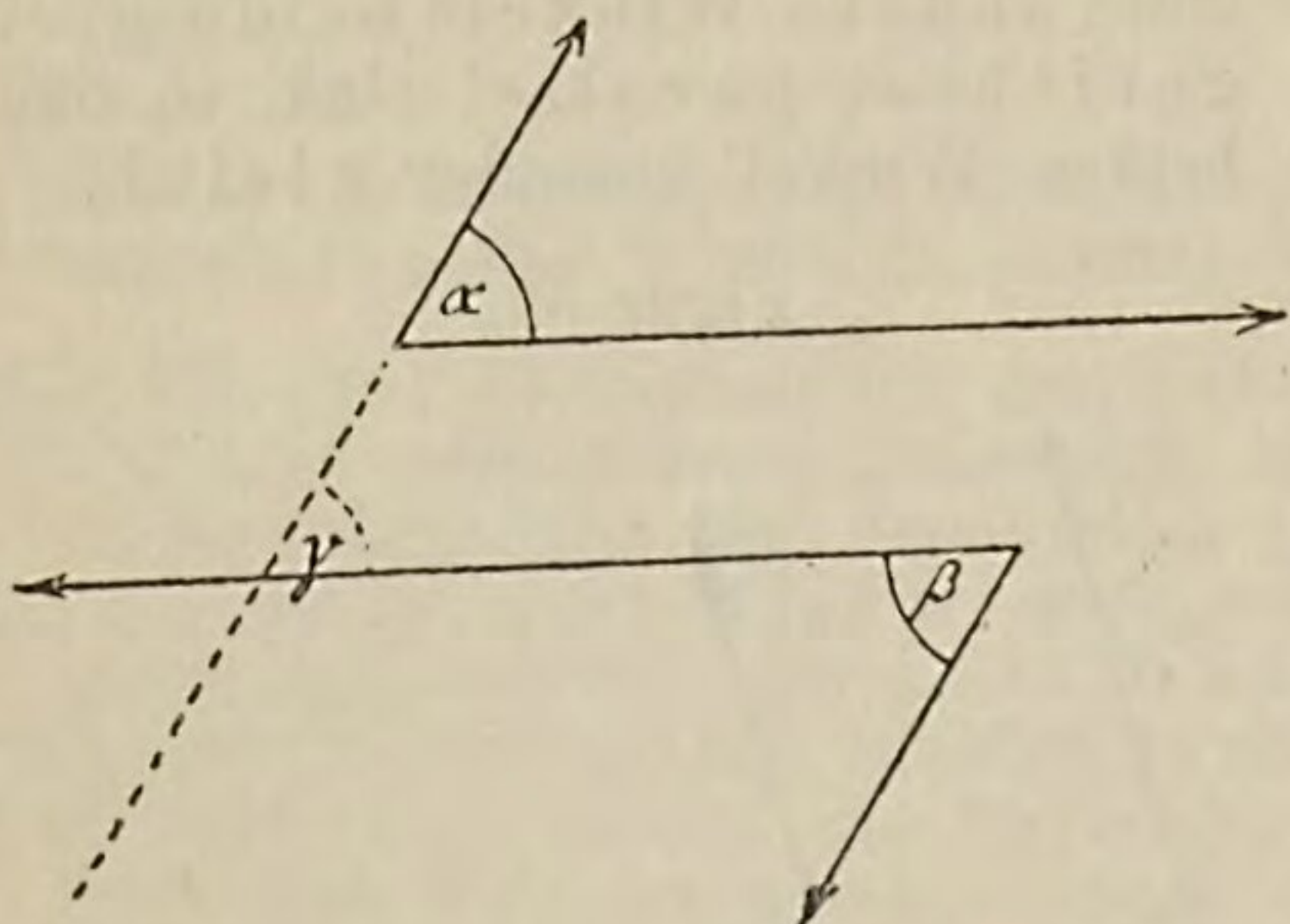
Die Winkel liegen entweder so, dass die Schenkel selbst (siehe Figur 54), oder dass die Verlängerung eines Schenkels des einen Winkels den einen Schenkel des andern Winkels (s. Figur 55) oder dessen Verlängerung (siehe Figur 56) schneiden. An diesem Schnittpunkte entsteht dann ein Winkel γ , zu welchem der eine Winkel α korrespondierender (s. Figur 54), der andere β ein Wechselwinkel (und zwar innerer Wechselwinkel in Figur 55, äusserer in Figur 56) ist. Man hat daher wieder nach Lehrsatz 25:

$$\alpha = \gamma \text{ und } \beta = \gamma$$

folglich auch:

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$$

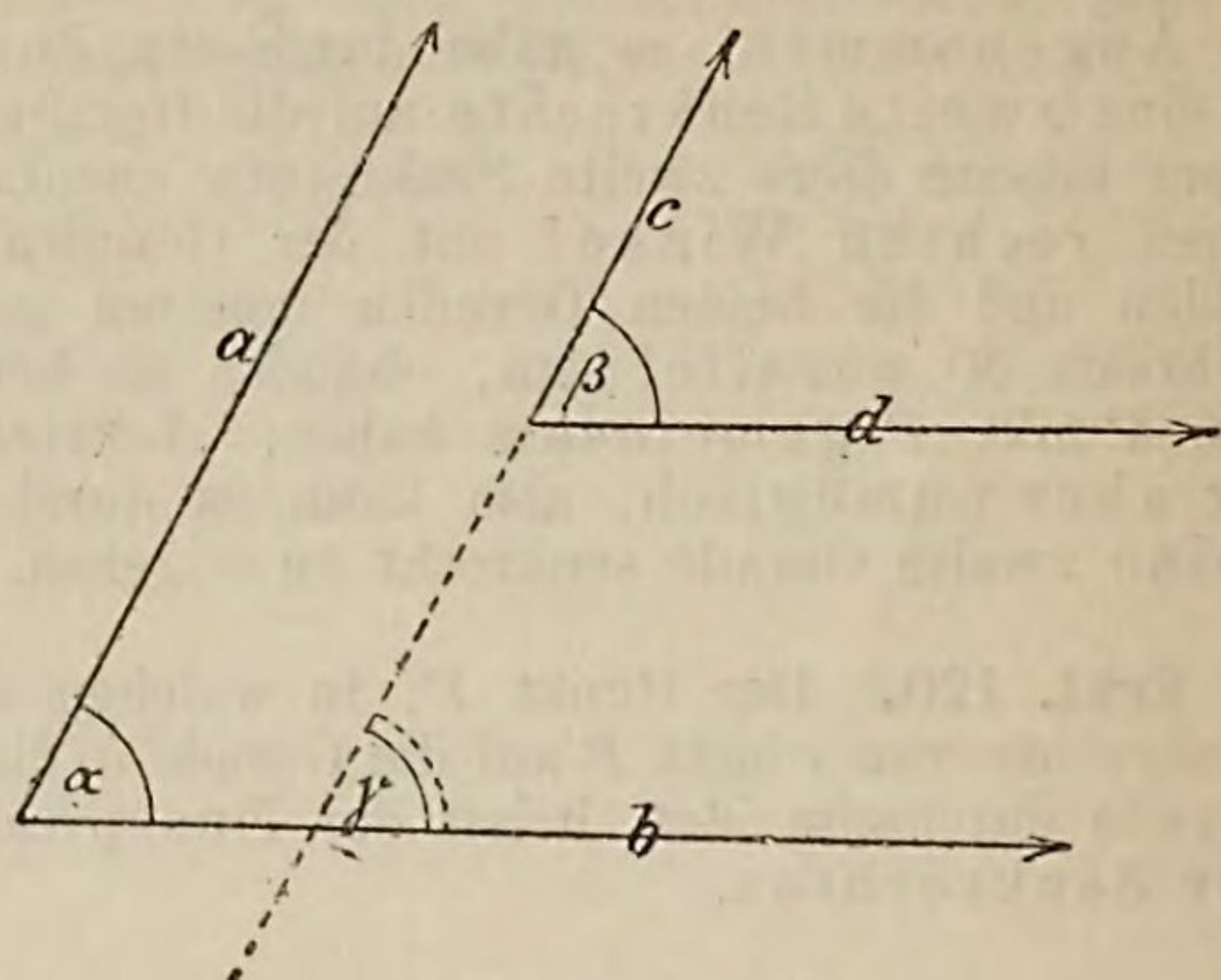
Figur 55.



Erkl. 124. Der Beweis für die Richtigkeit des nebenstehenden Lehrsatzes 35 lässt sich durch Zurückführung auf den vorigen Lehrsatz erbringen, wie folgt:

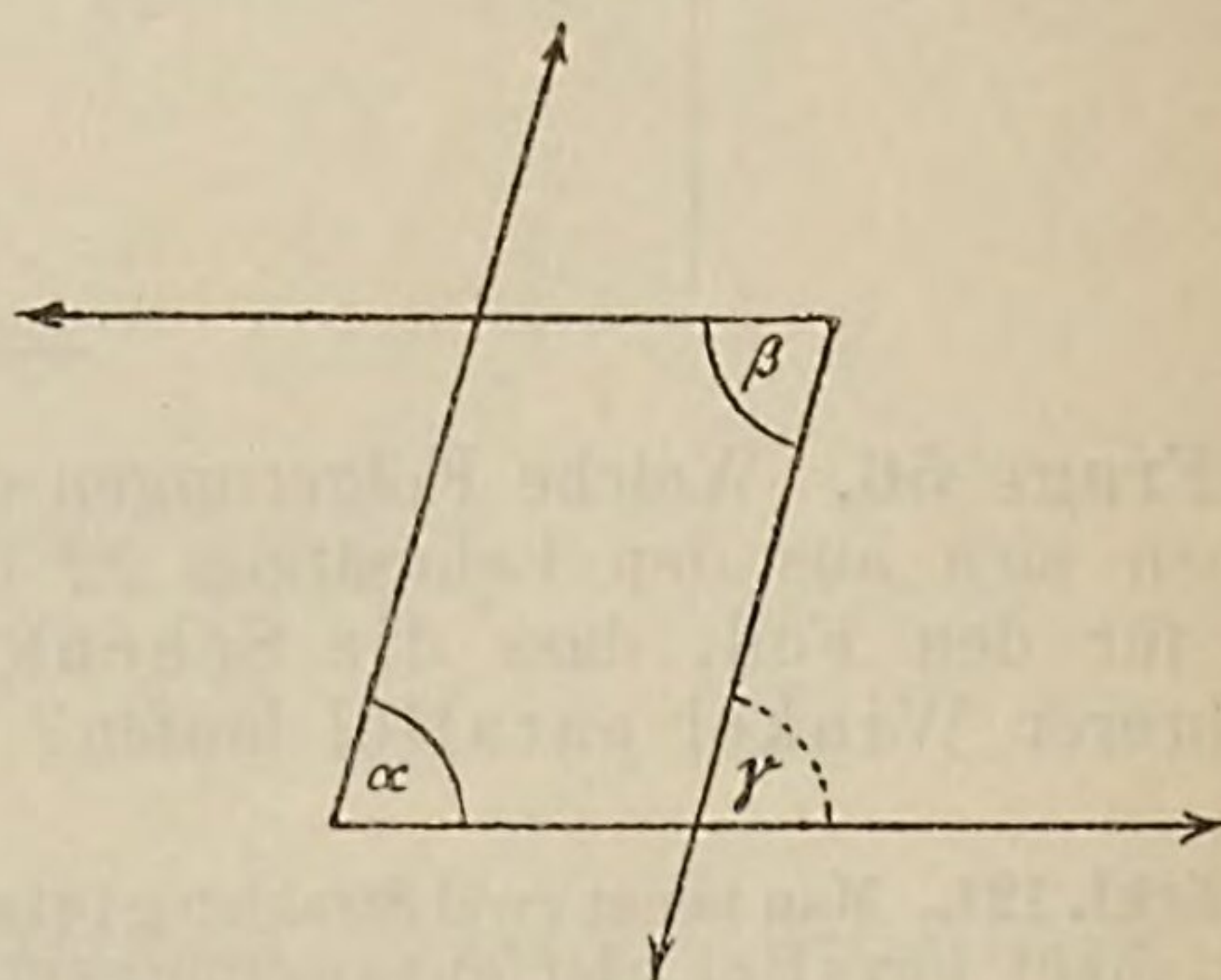
Der Nebenwinkel eines der beiden Winkel hat zwei gleichgerichtet parallele Schenkel,

Figur 53.

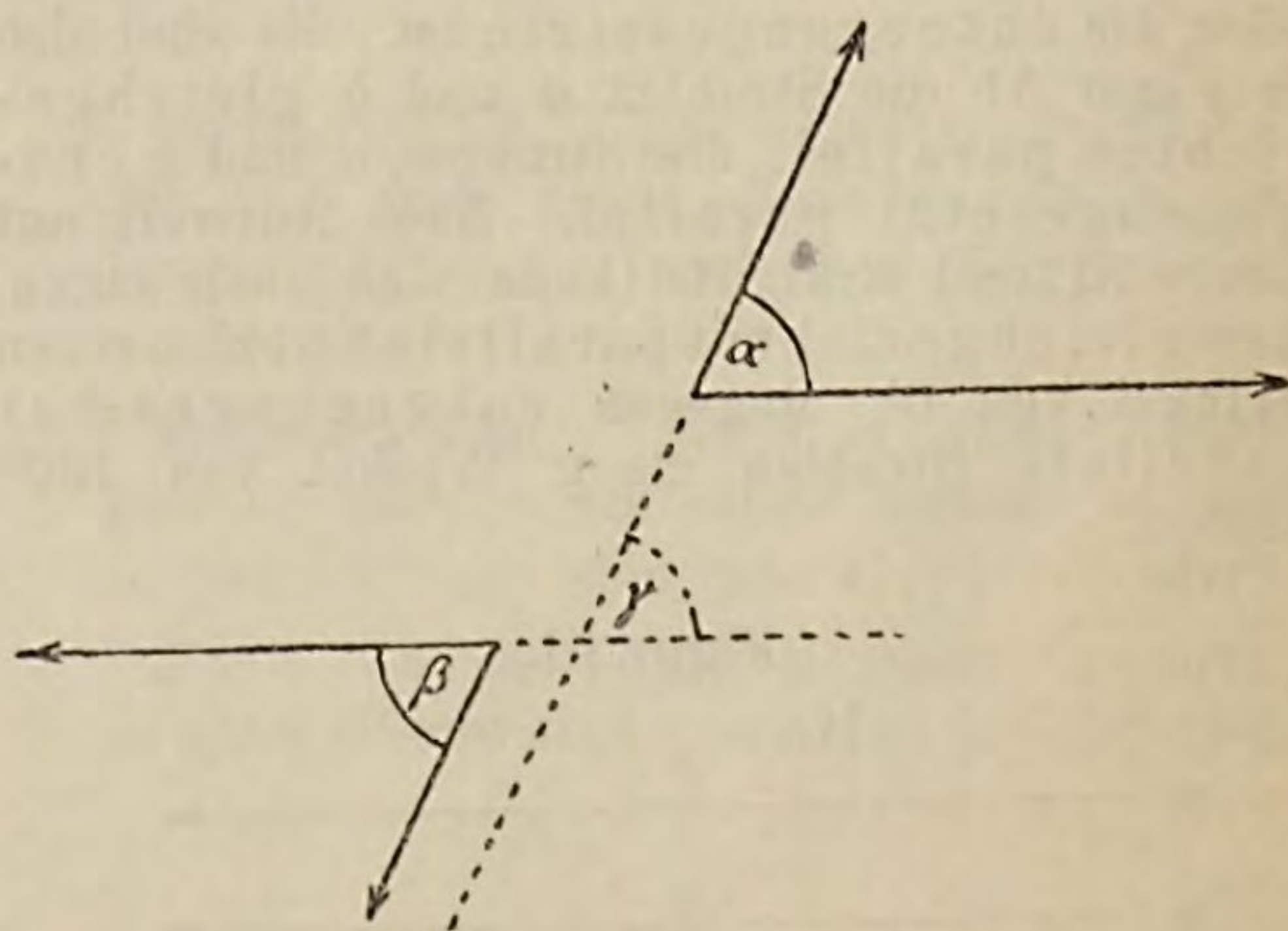


Lehrsatz 34. Wenn die Schenkel eines Winkels mit den Schenkeln eines andern Winkels beide entgegengesetzt parallel sind, so sind die beiden Winkel einander gleich.

Figur 54.



Figur 56.



ist also dem zweiten Winkel gleich nach Lehrsatz 33. Der erste Winkel selbst aber ist zu seinem Nebenwinkel, also auch zu dem mit diesem gleich grossen zweiten Winkel supplementär. Folglich ist (siehe Figur 57)

$$\alpha + \beta = 180^\circ \text{ oder } \beta = 180^\circ - \alpha$$

Auch an der Figur selbst lässt sich der Beweis direkt führen in ähnlicher Weise wie die vorigen Beweise:

Bringt man die Winkelschenkel oder ihre Verlängerungen zum Schnitt, so entsteht am Schnittpunkt ein Winkel γ , mit welchem α als korrespondierender Winkel gleich, β aber als entgegengesetzter Winkel (und zwar innerer entgegengesetzter Winkel in Figur 57, als äusserer in Figur 58) supplementär ist. Man erhält also

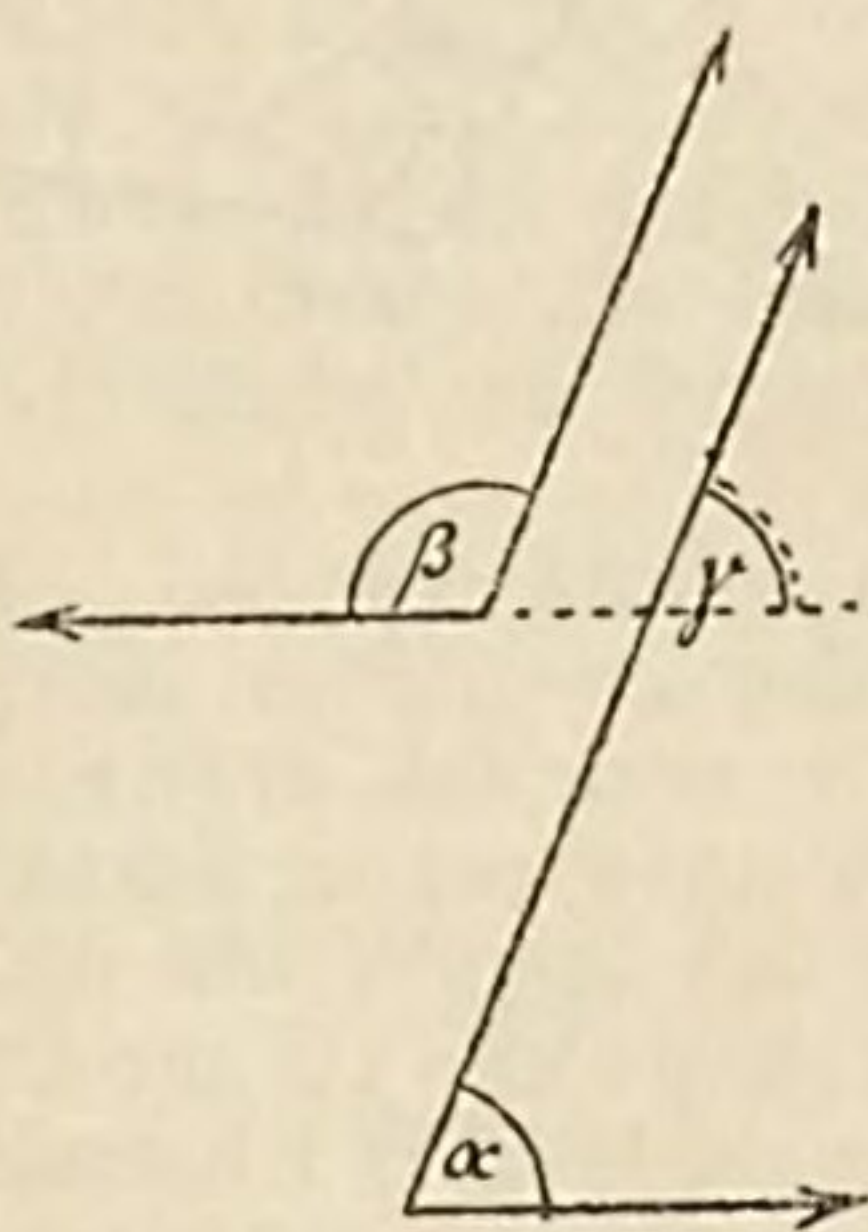
$$\alpha = \gamma \text{ und } \gamma + \beta = 180^\circ$$

folglich auch

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Erkl. 125. Die sämtlichen im Lehrsatz 36 zusammengefassten Behauptungen werden in genau gleicher Weise bewiesen, wie die vorigen drei Lehrsätze, indem an den Schnittpunkten der Winkelschenkel oder ihrer Verlängerungen gleiche korrespondierende oder Wechselwinkel, bzw. supplementäre entgegengesetzte Winkel entstehen und daraus auf Grund des Lehrsatzes 23 der Parallelismus der zweiten Schenkel dieser Winkel hervorgeht.

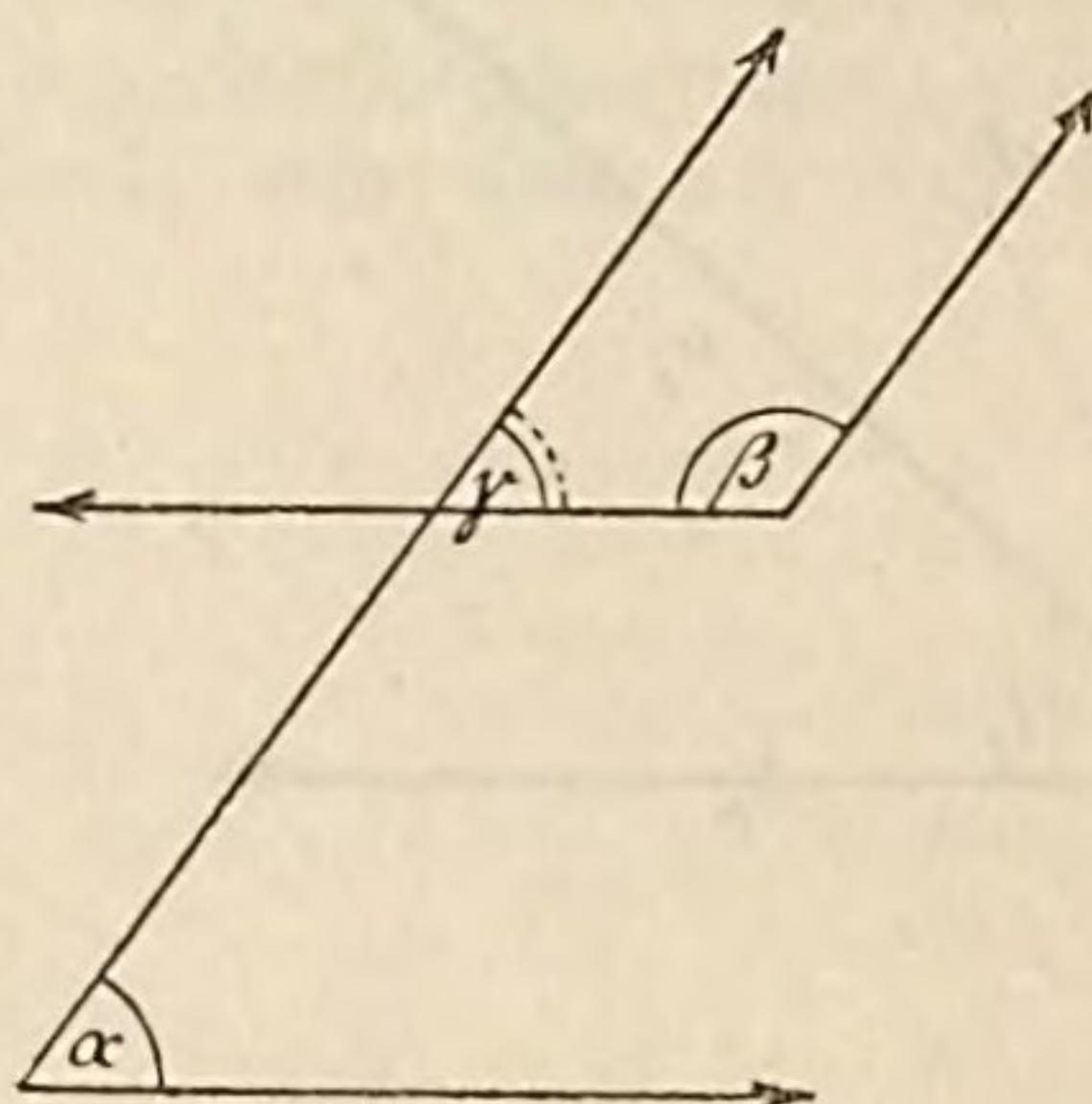
Figur 58.



Frage 57. Welche Folgerungen ergeben sich aus den Lehrsätzen 22 bis 25 für den Fall, dass die Schenkel zweier Winkel nicht wie in der vorigen Frage Winkel von 0° bzw. 180° , sondern sonst gleich grosse Winkel mit einander bilden?

Lehrsatz 35. Wenn von den Schenkeln eines Winkels der eine gleichgerichtet, der andere entgegengesetzt parallel ist je zu einem Schenkel eines andern Winkels, so sind die beiden Winkel supplementär.

Figur 57.



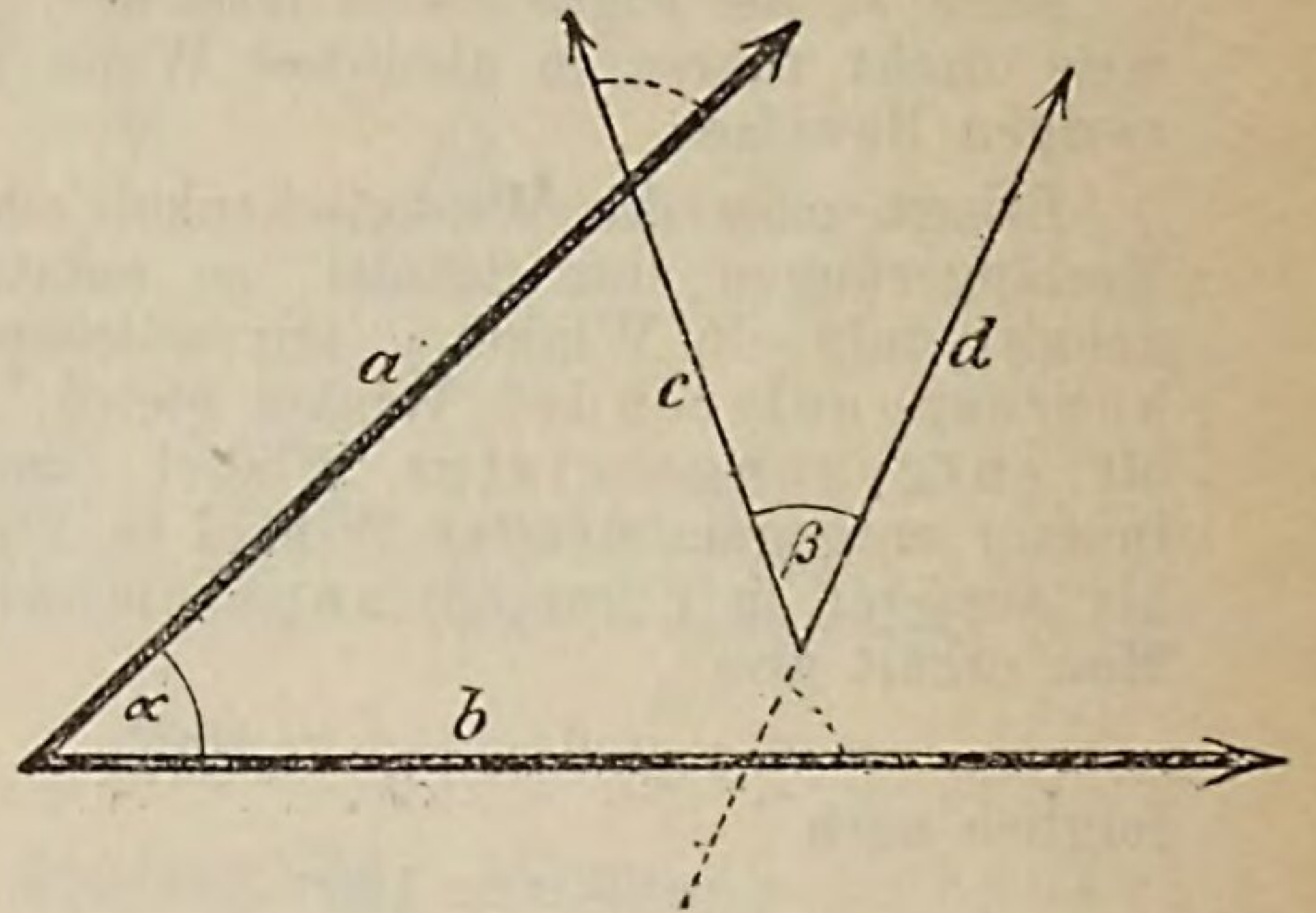
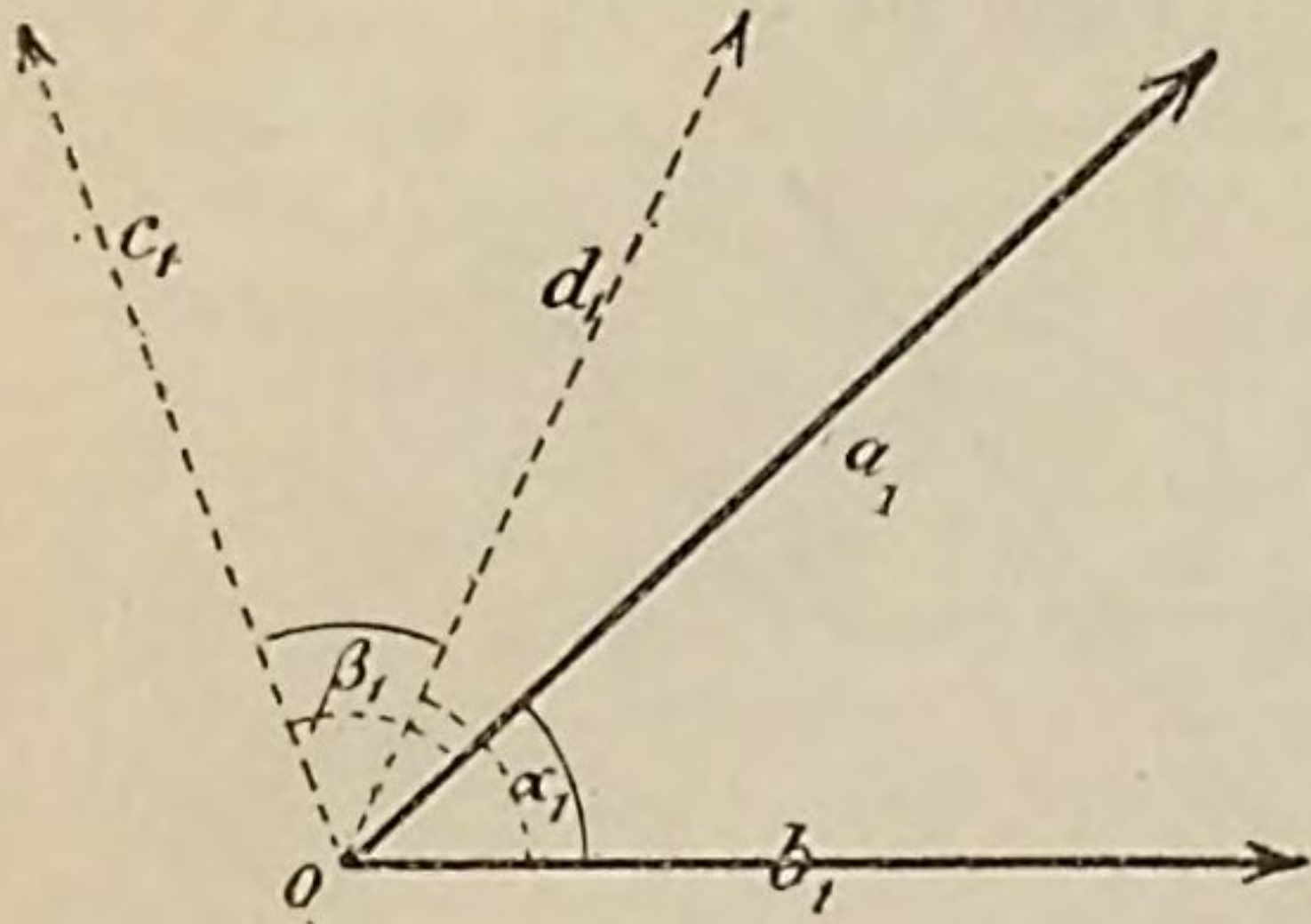
Lehrsatz 36. Wenn von den Schenkeln zweier gleichgrossen Winkel das eine Paar gleichgerichtet oder entgegengesetzt parallel ist, so ist das zweite Schenkelpaar in der entsprechend gleichen Weise parallel. — Ist von den Schenkeln zweier supplementären Winkel das eine Paar gleichgerichtet parallel oder entgegengesetzt parallel, so ist das andre Schenkelpaar auch parallel, aber im ersteren Falle entgegengesetzt parallel, im letzteren gleichgerichtet parallel.

Antwort. Wenn die Schenkelpaare zweier Winkel im allgemeinen gleich grosse Winkel bilden, so kann man folgende Aussagen machen:

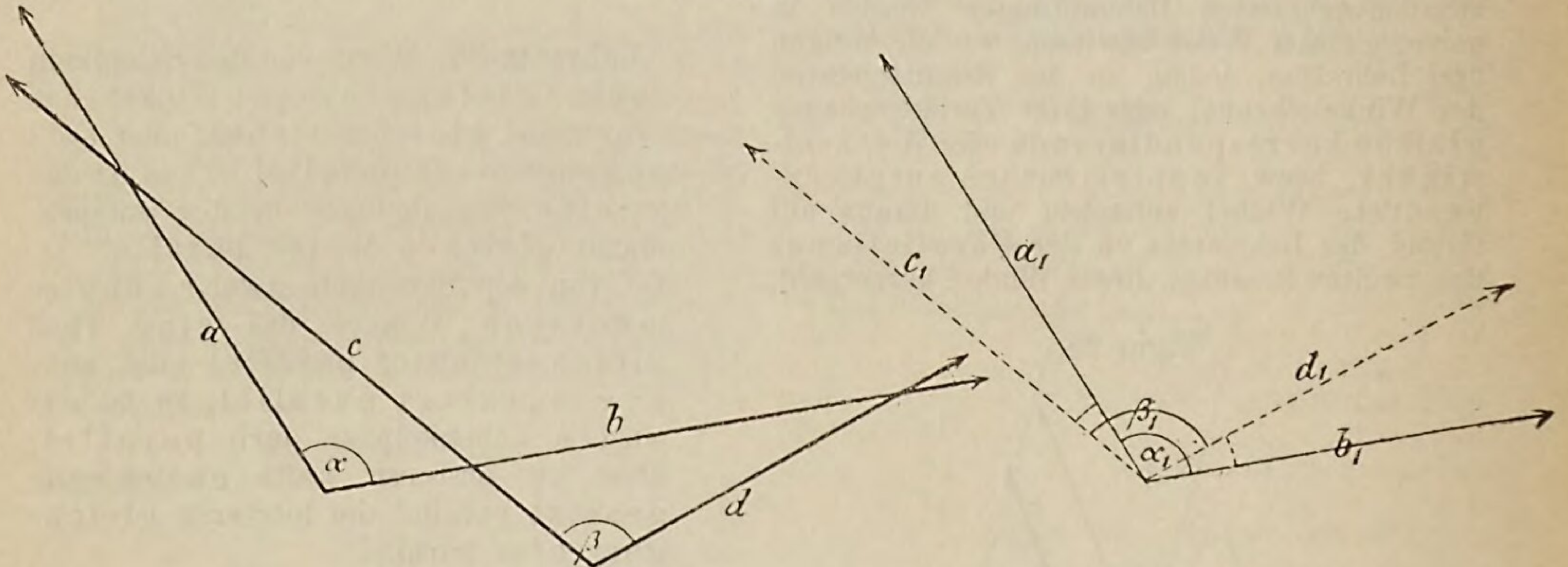
Lehrsatz 37. Wenn von den Schenkeln zweier Winkel oder deren Ver-

längerungen das erste Paar den gleichen Winkel bildet wie das zweite Schenkelpaar, so sind die beiden Winkel gleich gross.

Figur 59.



Figur 60.



Erkl. 126. Die Richtigkeit der in nebenstehendem Lehrsatz 37 ausgesprochenen Behauptung kann man, wie folgt, darthun:

Voraussetzung. Es seien (s. Figur 59 und 60) α und β zwei Winkel, deren eines Schenkelpaar, a und c , den gleichen Winkel bilde, wie das zweite Schenkelpaar b , d , also (nach der in Antwort der Frage 6 angegebenen Bezeichnung)

$$\sphericalangle(a, c) = \sphericalangle(b, d)$$

Behauptung. $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$

Beweis. Zum Beweise wähle man einen beliebigen Punkt O der Zeichnungsebene und ziehe durch denselben zu den vier Schenkeln a, b, c, d die gleichgerichtet parallelen Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 . Dann müssen nach Lehrsatz 33 die so entstandenen Winkel α_1 und β_1 den vorigen Winkel α und β gleich gross sein und ebenfalls die Winkel der Schenkelpaare $\sphericalangle(a_1, c_1) = \sphericalangle(b_1, d_1)$ einzeln gleich sein. Man wendet nun den Satz der allgemeinen Grössenlehre an, dass wenn gleiches zu glei-

chem addiert oder von gleichem subtrahiert wird, wieder gleiches entsteht. Von dem grössten Winkel der Figur ($b_1 c_1$) subtrahiert man nämlich der Reihe nach die beiden als gleich bekannten Winkel ($a_1 c_1$) und ($b_1 d_1$) und erhält so als gleichgrosse Restwinkel die Winkel $\alpha_1 = \beta_1$. Da also nach vorigem $\alpha_1 = \alpha$ und $\beta_1 = \beta$ ist, so muss auch $\alpha = \beta$ sein.

Erkl. 127. Die Richtigkeit der durch Lehrsatz 38 ausgesprochenen Behauptung kann man auf verschiedene Weise darthun.

Man kann auf Grund des vorigen Lehrsatzes 37 den indirekten Beweis führen wie folgt: Angenommen das zweite Schenkelpaar würde nicht den gleichen Winkel bilden, so könnte man durch Antragen des gleichen Winkels am Scheitelpunkt des zweiten Winkels einen solchen Winkel erhalten, dessen beide Schenkel gleiche Winkel mit den Schenkeln des ersten Winkels bildeten. Dieser Winkel müsste also nach Lehrsatz 37 dem ersten Winkel gleich sein, nicht aber auch (nach der Annahme) dem vorhandenen zweiten Winkel. Da aber alle gleichen Winkel nach Lehrsatz 9 kongruent sind, so ist letzteres unmöglich, also muss wirklich von vorn herein das zweite Schenkelpaar denselben Winkel gebildet haben, wie das erste.

Man kann denselben Beweis auch direkt an der Figur führen, indem man, wie in Erkl. 126 geschehen, an einem beliebigen Punkte O der Zeichnungsebene durch parallele Strahlen die Winkel an gleichem Scheitel überträgt. Als Punkt O kann auch einer der Scheitel der beiden gegebenen Winkel selbst benutzt werden. Jedesmal entsteht dann ein grösster Winkel der Figur, wie $\angle(b_1 c_1)$ in Figur 59 und 60; und durch Subtraktion der bekannten gleichen Winkel von diesem ist auch die Gleichheit der Restwinkel zu folgern.

Erkl. 128. Bei den Sätzen der Fragen 56 und 57 ist wohl darauf zu achten, dass die Winkelgleichheit der ersten bzw. zweiten Schenkelpaare unter sich bestehen muss; es müssen also die Winkel der Figuren sämtlich in gleichem Drehungssinne gemessen sein. Wird einer der Winkel im umgekehrten Drehungssinne gemessen, so bilden die Richtungen der betrachteten Schenkel den Nebenwinkel der nach vorigen Sätzen gleichen Winkel, man hat also in solchem Fall statt der gleichen Winkel nunmehr supplementäre Winkel.

Frage 58. Wie lauten die Anwendungen der in der vorigen Antwort angegebenen Lehrsätze für den besonderen Fall senkrechter Winkelschenkel?

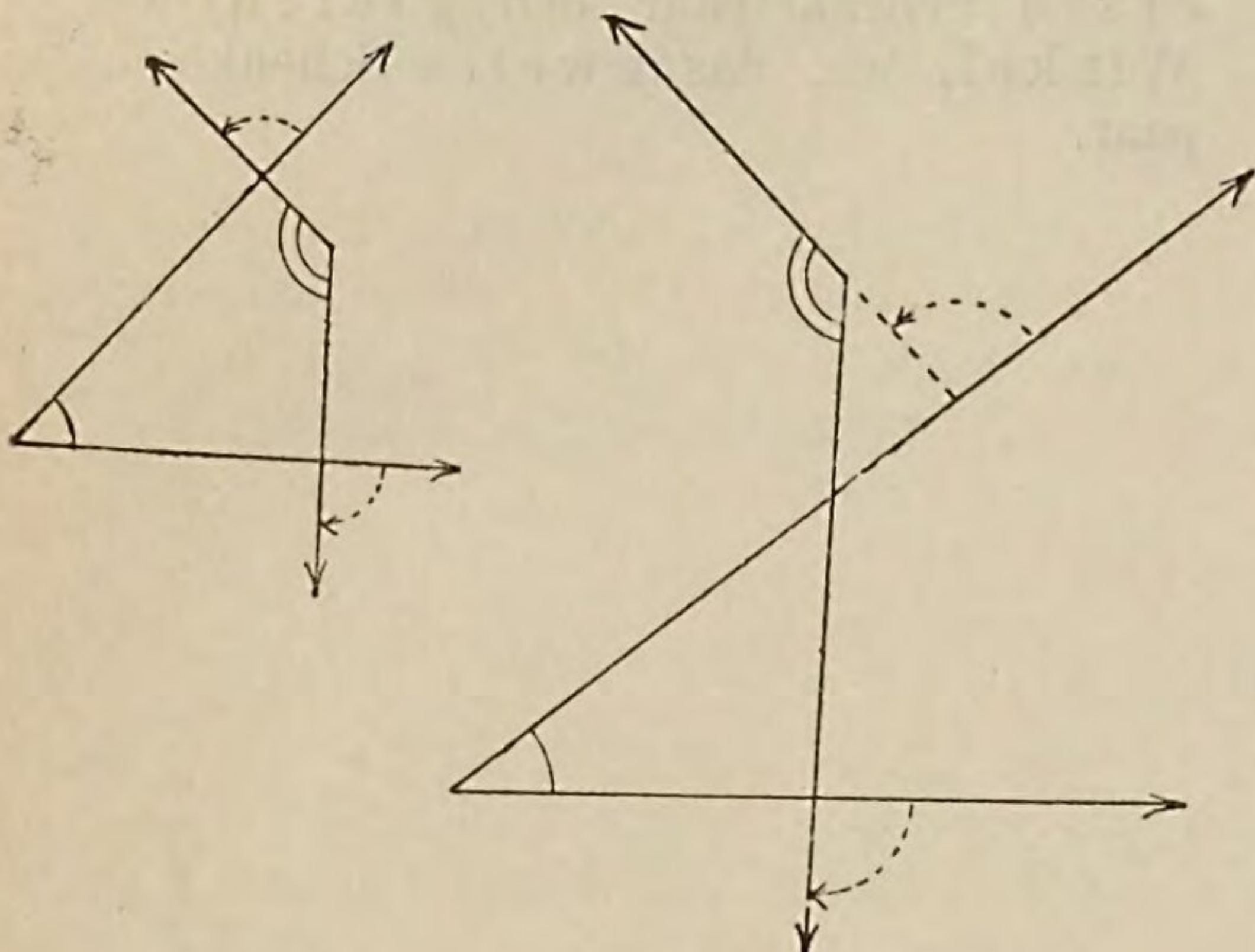
Lehrsatz 38. Von den Schenkeln zweier gleichgrossen Winkel bildet das erste Schenkelpaar den gleichen Winkel, wie das zweite Schenkelpaar.

Antwort. Wenn die Schenkelpaare zweier Winkel rechte Winkel mit einander bilden, so nehmen die beiden vorigen Lehrsätze folgende Gestalt an:

Erkl. 129. Unter Benutzung des in Erkl. 128 Gesagten kann man nebenstehenden Lehrsatz auch folgendermassen aussprechen:

Der Winkel zweier Senkrechten zu den Schenkeln eines Winkels ist jenem gleich oder supplementär, je nachdem die rechten Winkel im gleichen oder entgegengesetzten Drehungssinne gemessen sind (s. Figur 61 und 62).

Figur 62.

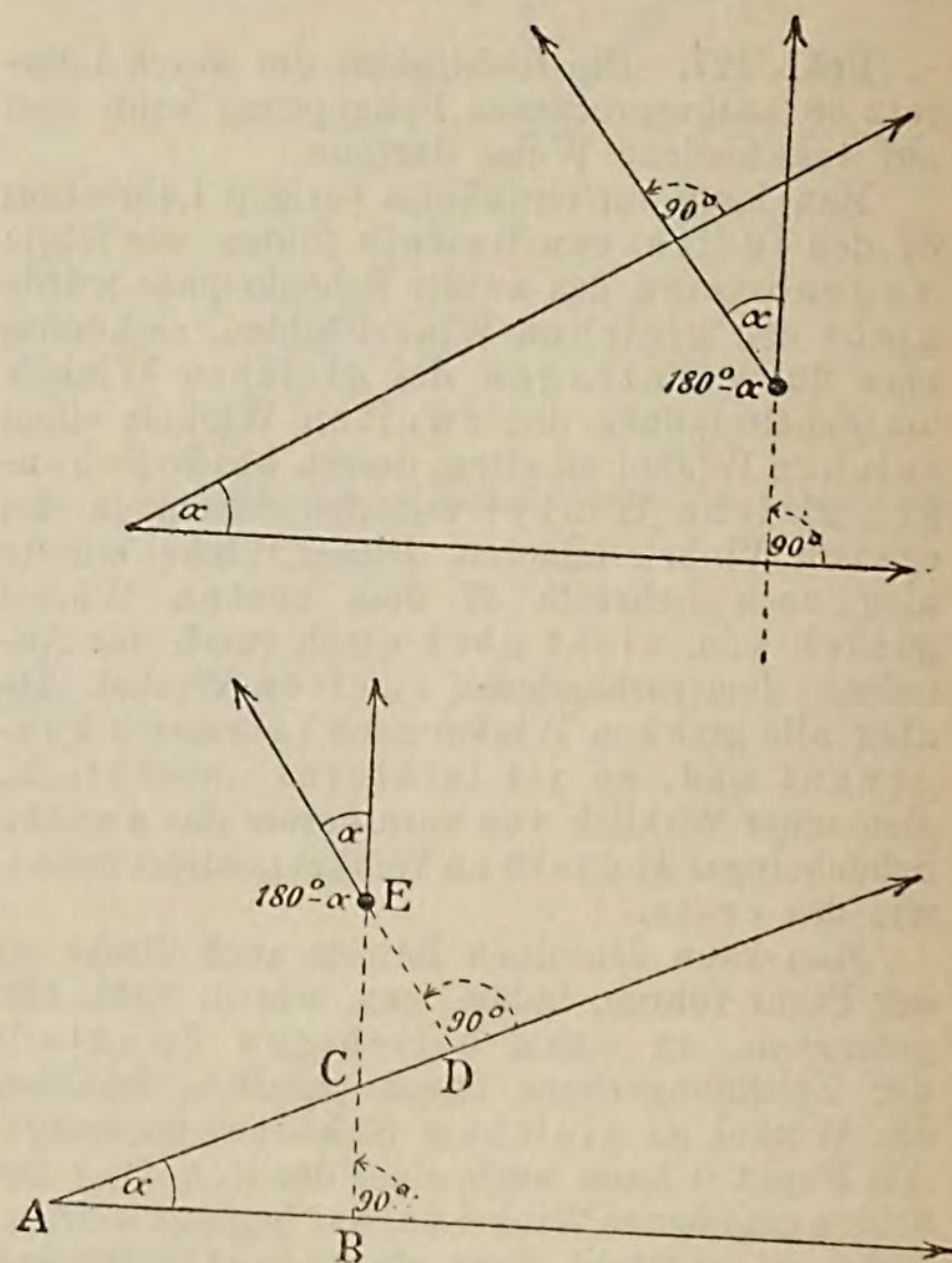


Erkl. 130. Der Beweis der Lehrsätze 39 und 40 ist genau gleichlautend mit dem Beweise der beiden vorigen Lehrsätze, von welchen diese beiden nur einzelne besonders häufig angewendete Fälle bilden.

Diese sämtlichen Beweise können aber ausser auf die oben genannten Arten auch noch dadurch geführt werden, dass man die Dreiecke betrachtet, welche von den Winkelschenkeln gebildet werden. So ist in Figur 62 in den Dreiecken ABC und CDE bekannt, dass die Winkel bei C als Scheitelwinkel gleich sind, jene bei B und D als rechte Winkel ebenfalls gleich, folglich müssen nach Lehrsatz 16 auch die dritten Winkel bei A und E einander gleich sein (Lehrsatz 39). In denselben Dreiecken sind für Lehrsatz 40 ausser den Scheitelwinkeln bei C die Winkel A und E als gleich bekannt und folglich auch jene bei B und D beide gleich gross, nämlich rechte Winkel.

Lehrsatz 39. Stehen die Schenkel eines Winkels senkrecht auf den Schenkeln oder deren Verlängerungen eines andern Winkels, so sind die beiden Winkel einander gleich.

Figur 61.



Lehrsatz 40. Wenn von den Schenkeln zweier gleichen Winkel das erste Schenkelpaar senkrecht steht, so ist auch das zweite Schenkelpaar senkrecht.

Aufgabensammlung.

A. Berechnungsaufgaben.

Aufgabe 1. Ein Winkel ist 43 Grad, 54 Minuten und 37 Sekunden gross; man soll die Grösse dieses Winkels in Sekunden ausdrücken.

Erkl. 131. Die in Gleichung 2) angedeuteten Multiplikationen und Additionen führt man am besten wie folgt aus:

$$\begin{array}{r} 37 \dots\dots\dots 37 \\ 54 \cdot 60 \dots\dots\dots 3240 \\ 43 \cdot 3600 \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} 25800 \\ 129 \end{array} \right. \\ \hline 158077 \end{array}$$

Man schreibt nämlich unter die Sekunden-ziffer sogleich das 60fache der Minutenzahl, alsdann in zwei Einzelzeilen erst das 600fache, und darunter noch das 3000fache der Gradzahl des umzurechnenden Winkels.

Auflösung. Bezeichnet man die in Sekunden ausgedrückte Grösse des Winkels mit x , so ist gemäss der Aufgabe und nach der Erkl. 33:

$$1) \dots x = 43^\circ + 54' + 37''$$

Um diesen Winkel x in Sekunden auszudrücken (siehe Erkl. 32), berücksichtige man, dass nach der in der Erkl. 35 angegebenen Zusammenstellung:

$$a) \dots 1' = 60''$$

dass ferner:

$$1^\circ = 60'$$

also nach a):

$$b) \dots 1^\circ = 60 \cdot 60'' = 3600''$$

ist.

In Rücksicht der Gleichungen a) und b) geht Gleichung 1) über in:

$$2) \dots x = 43 \cdot 3600'' + 54 \cdot 60'' + 37''$$

Durch Ausführung der in Gleichung 2) angedeuteten Multiplikationen und Additionen erhält man für die in Sekunden auszudrückende Grösse x jenes Winkels:

$$A) \dots x = 158077''$$

Aufgabe 2. Ein Winkel zählt $107^\circ 3' 15''$; man soll die Grösse dieses Winkels in Sekunden ausdrücken.

Erkl. 132.

$$\begin{array}{r} 15 \dots\dots\dots 15 \\ 3 \cdot 60 \dots\dots\dots 180 \\ 107 \cdot 3600 \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} 64200 \\ 321 \end{array} \right. \\ \hline 385395 \end{array}$$

Auflösung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe und liefert nach der in Erkl. 132 ausgeführten Berechnung:

$$x = 385395''$$

Aufgabe 3. Die Grösse eines Winkels von $1\frac{1}{4}$ Rechten soll in Sekunden angegeben werden.

Erkl. 133. Um die Zahl 112,5 mit 3600 zu multiplizieren führt man nach den Regeln der Decimalbruchrechnung eine Multiplikation mit 10 aus und entfernt dadurch gleichzeitig das Decimalkomma bei der Zahl 112,5 und eine 0 an der Zahl 3600; man erhält demnach:

$$112,5 \cdot 3600 = 1125 \cdot 360$$

Auflösung. Indem man berücksichtigt, dass:

$$1 \text{ Rechter Winkel} = 90^\circ$$

ist, dass also:

$$\frac{1}{4} \text{ Rechter Winkel} = \frac{90^\circ}{4} = 22\frac{1}{2}^\circ$$

ist, so findet man, dass:

$$1\frac{1}{4} \text{ R} = 90^\circ + 22\frac{1}{2}^\circ = 112,5^\circ$$

ist.

und nunmehr nach der in Erkl. 131 angegebenen Berechnungsart:

$$\begin{array}{r} \{ \quad 67500 \\ \quad 3375 \\ \hline 405000 \end{array}$$

Analog der Auflösung der Aufgabe 1 erhält man also für die in Sekunden ausgedrückte Masszahl x des Winkels:

$$x = 3600 \cdot 112,5''$$

also nach der Berechnung in Erkl. 133:

$$x = 405000''$$

Aufgabe 4. Ein Winkel hat $74^\circ 45'$; man soll die Grösse dieses Winkels in Minuten angeben.

Auflösung. Für die in Minuten auszudrückende Masszahl x des Winkels erhält man zunächst:

$$x = 74^\circ + 45'$$

und sodann nach Erkl. 35:

$$x = 74 \cdot 60' + 45'$$

also nach Ausführung einer Multiplikation und Addition:

$$x = 4485'$$

Aufgabe 5. Eine Winkelsumme von $3\frac{1}{5}$ R soll in Minuten umgerechnet werden.

Auflösung. Indem man berücksichtigt, dass:

$$1 \text{ R} = 90^\circ$$

ist, dass also:

$$3\frac{1}{5} \text{ R} = \frac{16}{5} \text{ R} = \frac{16}{5} \cdot 90^\circ$$

ergiebt, so findet man, dass nach Erkl. 35:

$$3\frac{1}{5} \text{ R} = \frac{16 \cdot 90^\circ}{5} = \frac{16 \cdot 90^\circ}{5} \cdot 60'$$

ist, also nach Ausführung einer Abkürzung des Bruches und einer Multiplikation:

$$3\frac{1}{5} \text{ R} = 17280'$$

Aufgabe 6. Ein Winkel von $\frac{2}{3}$ R soll in Graden ausgedrückt werden.

Auflösung. Man hat wie oben:

$$1 \text{ R} = 90^\circ$$

also:

$$\frac{2}{3} \text{ R} = \frac{2}{3} \cdot 90^\circ = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

Aufgabe 7. Welche aliquoten Teile:

- a) des Vollwinkels,
 - b) des gestreckten Winkels,
 - c) des rechten Winkels,
- lassen sich durch eine ganze Zahl von Winkelgraden ausdrücken?

Auflösung. Da man nach den Antworten der Fragen 14 bis 16 weiss, dass:

- a) der Vollwinkel $= 360^\circ$,
- b) der gestreckte Winkel $= 180^\circ$
- c) der rechte Winkel $= 90^\circ$

ist, so werden diejenigen aliquoten Teile dieser Winkel sich in ganzen Zahlen von

Erkl. 134. Um diejenigen Zahlen zu finden, welche in einer andern ohne Rest enthalten sind, stellt man diese Zahl als Produkt ihrer Primfaktoren dar (siehe Kleyers Lehrbuch der Zahlentheorie) und bildet aus diesen Primfaktoren der Reihe nach alle möglichen Einzelprodukte zu zweien, dreien u. s. f. Dabei braucht man nur soweit aufzurücken, bis die Quadratwurzel aus der betrachteten Zahl erreicht ist, dann kann man die höheren „Teiler“ oder „Divisoren“ dadurch finden, dass man mit den niederen in die zu untersuchende Zahl dividiert.

Für 360 hat man demnach, da $\sqrt{360} = 18, \dots$

$$360 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Also Einzelfaktoren:

$$1, 2, 3, 5$$

Faktoren zu zweien:

$$2 \cdot 2 = 4, 2 \cdot 3 = 6, 2 \cdot 5 = 10, 3 \cdot 3 = 9, 3 \cdot 5 = 15$$

Faktoren zu dreien:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12, 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$$

also bisher die Zahlen:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18$$

und dazu die entsprechenden über 18, welche jeweils mit den vorigen multipliziert, als Produkt 360 ergeben:

$$360, 180, 120, 90, 72, 60, 45, 40, 36, 30, 24, 20$$

Ebenso braucht man für 180⁰ nur durchzuprobieren die Zahlen bis 13, nämlich:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12,$$

um alsbald durch Division in absteigender Reihenfolge die Fortsetzung zu erhalten:

$$15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180$$

Endlich findet sich für 90 die Reihe:

$$1, 2, 3, 5, 6, 9 \text{ und } 10, 15, 18, 30, 45, 90$$

also zwar weniger Teiler als zuvor, aber immer noch mehr als für 100 (s. Erkl. 135).

Graden ausdrücken lassen, deren Divisoren in den Zahlen 360, 180 bzw. 90 ohne Rest enthalten sind. Diese sind aber für 360 die Zahlen:

$$2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180$$

Für 180 ist nur ein Teil dieser Reihe zu nehmen, nämlich:

$$2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90$$

und für 90 wieder nur ein Teil der letzteren, nämlich:

$$2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45$$

Demnach kann die Frage in folgender zusammenfassenden Weise beantwortet werden:

Man erhält:

$$\frac{360^0}{2} = 180^0 = 180^0$$

$$\frac{360^0}{3} = 120^0$$

$$\frac{360^0}{4} = \frac{180^0}{2} = 90^0 = 90^0$$

$$\frac{360^0}{5} = 72^0$$

$$\frac{360^0}{6} = \frac{180^0}{3} = 60^0$$

$$\frac{360^0}{8} = \frac{180^0}{4} = \frac{90^0}{2} = 45^0$$

$$\frac{360^0}{9} = 40^0$$

$$\frac{360^0}{10} = \frac{180^0}{5} = 36^0$$

$$\frac{360^0}{12} = \frac{180^0}{6} = \frac{90^0}{3} = 30^0$$

$$\frac{360^0}{15} = 24^0$$

$$\frac{360^0}{18} = \frac{180^0}{9} = 20^0$$

$$\frac{360^0}{20} = \frac{180^0}{10} = \frac{90^0}{5} = 18^0$$

$$\frac{360^0}{24} = \frac{180^0}{12} = \frac{90^0}{6} = 15^0$$

$$\frac{360^0}{30} = \frac{180^0}{15} = 12^0$$

$$\frac{360^0}{36} = \frac{180^0}{18} = \frac{90^0}{9} = 10^0$$

$$\frac{360^0}{40} = \frac{180^0}{20} = \frac{90^0}{10} = 9^0$$

$$\frac{360^0}{45} = 8^0$$

$$\frac{360^0}{60} = \frac{180^0}{30} = \frac{90^0}{15} = 6^0$$

$$\begin{aligned}\frac{360^0}{72} &= \frac{180^0}{36} = \frac{90^0}{18} = 5^0 \\ \frac{360^0}{90} &= \frac{180^0}{45} = 4^0 \\ \frac{360^0}{120} &= \frac{180^0}{60} = \frac{90^0}{30} = 3^0 \\ \frac{360^0}{180} &= \frac{180^0}{90} = \frac{90^0}{45} = 2^0 \\ \frac{360^0}{360} &= \frac{180^0}{180} = \frac{90^0}{90} = 1^0\end{aligned}$$

Aufgabe 8. Welche aliquoten Teile lassen sich in ganzen Zahlen ausdrücken:

- vom Grad in Minuten,
- von der Minute in Sekunden,
- von der Sekunde in Terzen u. s. w.?

Erkl. 135. Die Divisorenreihe der Zahl 60 ergibt sich folgendermassen:

1, 2, 3, 4, 5, 6...10, 12, 15, 20, 30, 60

Jene der Zahl 100 dagegen liefert bloss:

1, 2, 4, 5, 10...20, 25, 50, 100

Es hat also die Zahl 90 (siehe Erkl. 134) schon drei Teiler mehr und die noch kleinere Zahl 60 ebenfalls drei Teiler mehr als die viel grössere Zahl 100. Dieser Umstand, dass eine viel grössere Anzahl von aliquoten Teilen des 90teiligen Rechten Winkels und des 60teiligen Grads u. s. w. in ganzen Zahlen der nächst niederen Massordnung ausgedrückt werden kann, ist Veranlassung, dass diese Winkelteilung den Vorzug verdient und bewahrt gegenüber der Centesimalteilung des Rechten und der Decimalteilung des Grades (siehe Erkl. 30).

Auflösung. Von Grad, Minute, Sekunde u. s. w. in die nächst niedere Massteilung lassen sich so viele aliquote Teile in ganzen Zahlen angeben, als die Zahl 60 Divisoren hat. Durch deren Aufstellung erhält man folgende Zusammenstellung:

$\frac{1^0}{2} = 30'$	$\frac{1'}{2} = 30''$
$\frac{1^0}{3} = 20'$	$\frac{1'}{3} = 20''$
$\frac{1^0}{4} = 15'$	$\frac{1'}{4} = 15''$
$\frac{1^0}{5} = 12'$	$\frac{1'}{5} = 12''$
$\frac{1^0}{6} = 10'$	$\frac{1'}{6} = 10''$
$\frac{1^0}{10} = 6'$	$\frac{1'}{10} = 6''$
$\frac{1^0}{12} = 5'$	$\frac{1'}{12} = 5''$
$\frac{1^0}{15} = 4'$	$\frac{1'}{15} = 4''$
$\frac{1^0}{20} = 3'$	$\frac{1'}{20} = 3''$
$\frac{1^0}{30} = 2'$	$\frac{1'}{30} = 2''$
$\frac{1^0}{60} = 1'$	$\frac{1'}{60} = 1''$

Aufgabe 9. Welche aliquoten Teile des Winkelgrades lassen sich in ganzen Zahlen von Sekunden angeben?

Auflösung. Da man hat:

$$1^0 = 60'$$

und ferner:

$$1' = 60''$$

so ist:

$$1^0 = 3600''$$

Demnach kann man in ganzen Zahlen von Sekunden ausdrücken:

Erkl. 136. Die Zerlegungen der Zahl 3600 sind natürlich viel zahlreicher als irgend eine der in den vorigen Aufgaben ausgeführten. Man hat nämlich:

$$\begin{array}{ll}
 3600 = 2 \cdot 1800 & = 18 \cdot 200 \\
 & = 3 \cdot 1200 & = 20 \cdot 180 \\
 & = 4 \cdot 900 & = 24 \cdot 150 \\
 & = 5 \cdot 720 & = 25 \cdot 144 \\
 & = 6 \cdot 600 & = 30 \cdot 120 \\
 & = 8 \cdot 450 & = 36 \cdot 100 \\
 & = 9 \cdot 400 & = 40 \cdot 90 \\
 & = 10 \cdot 360 & = 45 \cdot 80 \\
 & = 12 \cdot 300 & = 48 \cdot 75 \\
 & = 15 \cdot 240 & = 50 \cdot 72 \\
 & = 16 \cdot 225 & = 60 \cdot 60
 \end{array}$$

Erkl. 137. Ausser den nebenstehend angegebenen aliquoten Teilen gibt es keine, deren Zahlen über eine Minute kommen; unter einer Minute könnten noch angegeben werden:

$$\begin{array}{lll}
 \frac{1^\circ}{120} = 30'' & \frac{1^\circ}{180} = 20'' & \frac{1^\circ}{240} = 15'' \\
 \frac{1^\circ}{300} = 12'' & \frac{1^\circ}{360} = 10'' &
 \end{array}$$

und endlich die Bruchteile:

$$\begin{array}{l}
 \text{für: } 600, 720, 900, 1200 \text{ und } 1800 \\
 \quad \quad 6'', 5'', 4'', 3'' \text{ und } 2''
 \end{array}$$

1) alle diejenigen aliquoten Teile eines Grades, welche schon eine ganze Anzahl von Minuten ergeben (siehe Aufgabe 8),

2) alle diejenigen aliquoten Teile eines Grades, deren Nenner zwar nicht in 60, wohl aber in 3600 ohne Rest enthalten sind.

Unter den letzteren finden sich ausser anderen noch folgende:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{1^\circ}{8} = 450'' = 7' 30'' & \frac{1^\circ}{72} = 50'' \\
 \frac{1^\circ}{9} = 400'' = 6' 40'' & \frac{1^\circ}{75} = 48'' \\
 \frac{1^\circ}{16} = 225'' = 3' 45'' & \frac{1^\circ}{80} = 45'' \\
 \frac{1^\circ}{18} = 200'' = 3' 20'' & \frac{1^\circ}{90} = 40'' \\
 \frac{1^\circ}{24} = 150'' = 2' 30'' & \frac{1^\circ}{100} = 36'' \\
 \frac{1^\circ}{25} = 144'' = 2' 24'' & \frac{1^\circ}{144} = 25'' \\
 \frac{1^\circ}{36} = 100'' = 1' 40'' & \frac{1^\circ}{150} = 24'' \\
 \frac{1^\circ}{40} = 90'' = 1' 30'' & \frac{1^\circ}{200} = 18'' \\
 \frac{1^\circ}{45} = 80'' = 1' 20'' & \frac{1^\circ}{225} = 16'' \\
 \frac{1^\circ}{48} = 75'' = 1' 15'' & \frac{1^\circ}{400} = 9'' \\
 \frac{1^\circ}{50} = 72'' = 1' 12'' & \frac{1^\circ}{450} = 8''
 \end{array}$$

Aufgabe 10. Ein Winkel von 75° soll in Bruchteilen des rechten Winkels ausgedrückt werden.

Erkl. 138. Man findet also aus einer gegebenen Anzahl von Graden den Ausdruck in Bruchteilen des rechten Winkels durch Division jener Anzahl mit 90.

Auflösung. Da man hat:

$$1 \text{ R} = 90^\circ$$

so ist umgekehrt:

$$90^\circ = 1 \text{ R}$$

also durch Division:

$$1^\circ = \frac{1}{90} \text{ R}$$

und folglich:

$$75^\circ = \frac{75}{90} \text{ R} = \frac{5}{6} \text{ R}$$

Aufgabe 11. Ein Winkel von 27 Minuten soll in Bruchteilen eines Grades ausgedrückt werden.

Erkl. 139. Man findet also aus einer gegebenen Anzahl von Minuten den Ausdruck in Bruchteilen des Grades durch Division jener Anzahl mit 60.

Auflösung. Da man hat:

$$1^\circ = 60'$$

so ist umgekehrt:

$$60' = 1^\circ$$

also durch Division:

$$1' = \frac{1}{60}^\circ$$

und folglich:

$$27' = \frac{27}{60}^\circ = \frac{9}{20}^\circ = 0,45^\circ$$

Aufgabe 12. Ein Winkel von $35^{\circ} 45'$ soll in Ganzen und Bruchteilen von Graden angegeben werden.

Erkl. 140. Statt der Schreibweise:

$$0,75^{\circ}$$

schreibt man oft auch:

$$0^{\circ},75$$

indem das Schriftzeichen für Grad und ebenso auch für Minute oder Sekunde in den Zwischenraum des Dezimalkommas zwischen Ganze und Zehntel gesetzt wird.

Auflösung. Da der zu berechnende Winkel 35 ganze Grade zählt, so ist nur noch der Wert der $45'$ in Grade umzusetzen. Hiefür ist nach der vorigen Aufgabe:

$$1' = \frac{1^{\circ}}{60}$$

also für unsere Aufgabe:

$$45' = \frac{45^{\circ}}{60} = \frac{3^{\circ}}{4} = 0,75^{\circ}$$

Demnach erhält man:

$$\begin{aligned} 35^{\circ} 45' &= 35^{\circ} + \frac{3^{\circ}}{4} = 35 \frac{3^{\circ}}{4} \\ &= 35^{\circ} + 0,75^{\circ} = 35,75^{\circ} \end{aligned}$$

Aufgabe 13. Ein Winkel von 8723 Minuten soll in Grade und Minuten umgerechnet werden.

Erkl. 141. Die in nebenstehender Auflösung angedeutete Teilung wird folgendermassen ausgeführt:

$$\begin{array}{r} 8723 : 60 = 145 \\ \underline{272} \\ 323 \\ \underline{23} \\ \text{Rest} = 23 \end{array}$$

Auflösung. Da je 60 Minuten einen Grad ausmachen, so hat man zu untersuchen, wie oft die Zahl 60 in 8723 enthalten ist, und findet als Quotienten die Anzahl der Grade, als Rest die Anzahl übrig bleibender Minuten. Man findet also:

$$8723' = 145^{\circ} 23'$$

Aufgabe 14. Ein Winkel von 7644 Minuten soll in Ganzen und Bruchteilen von Graden angegeben werden.

Erkl. 142. Die Ausrechnung erhält folgende Gestalt:

$$\begin{array}{r} 7644 : 60 = 127,4 \\ \underline{164} \\ 444 \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

Nachdem das Dezimalkomma im Quotienten erreicht ist, wird keine neue Stelle mehr „angehängt“, sondern die Ziffer 0 vom Divisor 60 abgeworfen.

Auflösung. Analog der vorigen Auflösung findet man zunächst wieder:

$$7644' = 127^{\circ} 24'$$

Sollen diese $24'$ noch in Bruchteile des Grades verwandelt werden, so verfährt man nach Aufgabe 12 durch Weiterführung der Division und erhält:

$$7644' = 127 \frac{24^{\circ}}{60} = 127 \frac{2^{\circ}}{5} = 127,4^{\circ}$$

Aufgabe 15. Ein Winkel von $14^{\circ} 27' 33''$ soll in Minuten ausgedrückt werden.

Auflösung. Da der Winkel schon $27'$ enthält, so bleibt die doppelte Aufgabe noch zu lösen:

- 1) die 14° in Minuten zu verwandeln,
- 2) die $33''$ in Minuten zu verwandeln und die beiden Werte zu $27'$ zu addieren.

Der erste Teil liefert nach Aufgabe 1:

$$14^{\circ} = 14 \cdot 60' = 840'$$

Der zweite Teil ergibt unter Berücksichtigung, dass:

$$1' = 60''$$

also umgekehrt:

$$1'' = \frac{1'}{60}$$

für unsere Zahl von $33''$:

$$33'' = \frac{33'}{60} = \frac{11'}{20} = 0,55'$$

Also erhält man:

$$\begin{aligned} 14^\circ 27' 33'' &= 840' + 27' + 0,55' \\ &= 867,55' = 867 \frac{11'}{20} \end{aligned}$$

Aufgabe 16. Ein Winkel von $3129''$ soll in Minuten und Sekunden ausgedrückt werden.

Auflösung. Da nach voriger Aufgabe:

$$1'' = \frac{1'}{60}$$

so hat man für:

$$3129'' = \frac{3129'}{60} = 52 \frac{9'}{60} = 52' 9''$$

Aufgabe 17. Ein Winkel von $28713''$ soll in Ganzen und Bruchteilen von Minuten ausgedrückt werden.

Auflösung. Soll der Rest, welcher in der vorigen Aufgabe als Sekunden beibehalten wurde, auch noch in Bruchteilen der Minuten zum Ausdruck kommen, so ist die Division weiterzuführen zu Dezimalstellen der Minuten. Man erhält also:

$$28713'' = \frac{28713'}{60} = 478,55' = 478 \frac{11'}{20}$$

Aufgabe 18. Ein Winkel von $124,0625^\circ$ soll in Grad, Minuten und Sekunden umgerechnet werden.

Auflösung. Da der Winkel schon 124 ganze Grade enthält, so bleibt als Aufgabe, den Decimalbruch von $0,0625^\circ$ in Minuten und Sekunden zu verwandeln. Zu dem Zwecke verwandelt man zunächst in Minuten, nämlich:

$$0,0625^\circ = 0,0625 \cdot 60' = 3,75'$$

und erhält so 3 ganze Minuten und einen Rest von $0,75'$. Letzteren verwandelt man weiter in Sekunden, nämlich:

$$0,75' = 0,75 \cdot 60'' = 45''$$

oder auch nach Aufgabe 8:

$$0,75' = \frac{3'}{4} = 3 \cdot \frac{1'}{4} = 3 \cdot 15'' = 45''$$

Also erhält man im ganzen:

$$124,0625^\circ = 124^\circ 3' 45''$$

Aufgabe 19. Ein Winkel von $42''$ soll in Bruchteilen des Grades angegeben werden.

Auflösung. Da man hat:

$$1^{\circ} = 60' = 60 \cdot 60'' = 3600''$$

so ist umgekehrt:

$$1'' = \frac{1^{\circ}}{3600}$$

also erhält man für:

$$42'' = \frac{42^{\circ}}{3600} = \frac{7^{\circ}}{600} = 0^{\circ},011666\dots$$

Aufgabe 20. Ein Winkel von $43729''$ soll in Ganzen und Bruchteilen des Grades angegeben werden.

Auflösung. Man erhält wie in der vorigen Aufgabe, da:

$$1'' = \frac{1^{\circ}}{3600}$$

$$43729'' = \frac{43729^{\circ}}{3600} = 12^{\circ},1469444\dots$$

Erkl. 143. Die zur nebenstehenden Divisionsaufgabe gehörige Berechnung nimmt folgende Gestalt an:

$$43729 : 3600 = 12,1469444\dots$$

$$\begin{array}{r} 7729 \\ \hline 529 \\ 169 \\ \hline 250 \\ 340 \\ \hline 160 \\ 16 \end{array}$$

Aufgabe 21. Ein Winkel von $79438''$ soll in Graden, Minuten und Sekunden ausgedrückt werden.

Erkl. 144. Die nebenstehende Aufgabe veranlasst folgende Berechnung:

$$79438 : 3600 = 22$$

$$\begin{array}{r} 7438 \\ \hline \end{array}$$

$$238 : 60 = 3$$

$$\begin{array}{r} 58 \end{array}$$

Auflösung. Soll die Angabe des Winkels nicht in Bruchteile des Grades übergehen, so muss der Rest, welcher bei der Division durch 3600 übrig bleibt, weiter verwandelt werden in Minuten und zwar durch Division durch 60, statt 3600.

Man erhält demnach zunächst:

$$79438'' = \frac{79438^{\circ}}{3600} = 22 \frac{238^{\circ}}{3600} = 22^{\circ} 238''$$

Dieser Rest von $238''$ wird alsdann weiter verwandelt, nämlich:

$$238'' = \frac{238'}{60} = 3 \frac{58'}{60} = 3' 58''$$

Demnach erhält man im ganzen:

$$79438'' = 22^{\circ} 3' 58''$$

Aufgabe 22. Ein Winkel von $542319''$ soll in Graden, Minuten und Sekunden ausgedrückt werden.

Auflösung. Die Aufgabe ist genau analog der vorigen und liefert zunächst:

$$542319'' = 150^{\circ} + 2319''$$

und durch die zweite Division:

$$542319'' = 150^{\circ} 38' 39''$$

Erkl. 145. Die Berechnung zu dieser Aufgabe ist folgende:

$$\begin{array}{r} 542319 : 3600 = 150 \\ \underline{18231} \\ 2319 : 60 = 38 \\ \underline{519} \\ 39 \end{array}$$

Erkl. 146. Die in den beiden letzten Aufgaben 21 und 22 geforderte Umrechnung ist in manchen Logarithmischen Tafeln für eine Anzahl von Ziffern zusammengestellt. So enthält z. B. die siebenstellige Logarithmentafel von Schrön für alle Zahlen von 1 bis 10799 die Angabe, wie viele Grade, Minuten und Sekunden dieselbe Zahl beträgt, wenn sie Sekunden bedeutet, also für jede Sekunde von 1'' bis 2° 59' 59'' oder bis 3°.

Aufgabe 23. Ein Winkel betrage 23° 44' 36''; derselbe soll vervierfacht werden.

Erkl. 147. Die Berechnung nebenstehender Aufgabe kann in folgender Form ausgeführt werden:

$$\begin{array}{r} 23^\circ 44' 36'' \cdot 4 \\ = 92^\circ 176' 144'' \\ = 92^\circ 178' 24'' \\ = 94^\circ 58' 24'' \end{array}$$

Bei einiger Uebung wird man auch imstande sein, nach Niederschrift der Ziffer 4 von 144 die andern 14 gar nicht mehr anzuschreiben, sondern gleich mit Abzug von 12 bloss 2 noch anzuschreiben und die im Gedächtnis behaltenen 2' gleich zu der zunächst entstehenden Ziffer 16 zuzuzählen, so dass hiefür gleich 18 genommen würde. Ebenso wären alsdann von der Ziffer 17 gleich wieder 12 auszuscheiden und bloss 5 anzuschreiben.

Aufgabe 24. Es sei angegeben, dass der Aussenwinkel eines gleichwinkligen Vielecks von 81 Ecken = 4° 26' 40'' sei. Man soll prüfen, ob diese Angabe richtig ist.

Erkl. 148. Die Einzelberechnungen zu nebenstehender Aufgabe sind folgende:

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 81 = 324; \quad 26 \cdot 81 = 2106; \quad 40 \cdot 81 = 3240 \\ 2106 : 60 = 35 \\ \underline{306} \\ 6 \\ 3240 : 60 = 54 \\ \underline{240} \\ 0 \end{array}$$

(Vergleiche auch Aufgabe 29.)

Auflösung. Der vierfache Winkel hat viermal so viele Grade und viermal so viele Minuten und viermal so viele Sekunden als der einfache. Sowie aber das vierfache der Sekunden- oder Minutenzahl die Zahl 60 überschreitet, ergibt die Zahl eine Minute oder einen Grad, welche zu den schon vorhandenen dieser Gattung zuzuzählen sind

Daher erhält man zunächst:

$$23^\circ 44' 36'' \cdot 4 = 92^\circ 176' 144''$$

Und da hierin:

$$144'' = 2' 24''$$

und ferner:

$$176' = 2^\circ 56'$$

ergeben, so sind jene 2' zu diesen 56' und diese 2° zu den ursprünglichen 92° zuzuzählen, so dass im ganzen entsteht:

$$23^\circ 44' 36'' \cdot 4 = 94^\circ 58' 24''$$

Auflösung. Da nach Lehrsatz 12 die Summe der zusammengehörigen Aussenwinkel eines Vielecks gleich einem Vollwinkel sein soll, so müssten sich 360° ergeben, wenn der Winkel von 4° 26' 40'' mit 81 multipliziert wird.

Man erhält zunächst (siehe Erkl. 148):

$$4^\circ 26' 40'' \cdot 81 = 324^\circ 2106' 3240''$$

Darin ist wieder im einzelnen:

$$2106' = 35^\circ 6'$$

und weiter:

$$3240'' = 54'$$

Also entsteht im ganzen:

$$324^{\circ} + 35^{\circ} 6' + 54'$$

Durch Zusammenfassung der $6' + 54'$ erhält man wieder $60''$ oder 1° , also sind zu 324° noch $35^{\circ} + 1^{\circ}$ oder 36° zu addieren, und man erhält richtig:

$$4^{\circ} 26' 40'' \cdot 81 = 360^{\circ}$$

Aufgabe 25. Man soll von einem Winkel von $43^{\circ} 15' 28''$ die Hälfte berechnen.

Auflösung. Die Hälfte des Winkels muss halb so viele Grade, halb so viele Minuten und halb so viele Sekunden haben als der ganze Winkel. Ist aber die Anzahl der Grade oder Minuten keine gerade, so bleibt je ein halber Grad oder eine halbe Minute übrig, und muss als $30'$ oder $30''$ zu den durch die Division erhaltenen Minuten oder Sekunden zugezählt werden. Man erhält also:

$$\begin{aligned} 43^{\circ} 15' 28'' : 2 &= \frac{43^{\circ}}{2} \frac{15'}{2} \frac{28''}{2} \\ &= 21 \frac{1^{\circ}}{2} 7 \frac{1'}{2} 14'' \\ &= 21^{\circ} 30' + 7' 30'' + 14'' \\ &= 21^{\circ} 37' 44'' \end{aligned}$$

Aufgabe 26. Es soll ein Winkel gesucht werden, dessen zwölffaches gleich $143^{\circ} 43' 39''$ sei.

Erkl. 149. Bei der Ausrechnung pflegt man die einzelnen Teile nicht besonders auszuwerten, sondern der von den $\frac{143^{\circ}}{12}$ verbleibende Rest von 11° wird sofort nach Aufgabe 1 in 660 Minuten verwandelt, dazu die ursprünglich vorhandenen 43 Minuten zugeschlagen und die Summe der beiden weiter mit 12 dividiert. Ebenso bei Minuten und Sekunden. Dadurch entsteht folgende Ausrechnung:

$$143^{\circ} 43' 39'' : 12 = 11^{\circ} 58' 38,25''$$

$\frac{23}{11 \cdot 60 + 43} = \frac{703'}{103}$

$$11 \cdot 60 + 43 = 703'$$

$\frac{103}{7 \cdot 60 + 39} = \frac{459}{99}$

$$7 \cdot 60 + 39 = 459$$

$\frac{99}{30}$

$\frac{30}{60}$

$\frac{60}{0}$

Auflösung. Der gesuchte Winkel muss sein der zwölfte Teil von $143^{\circ} 43' 39''$. Er muss also haben:

$$\frac{143^{\circ}}{12} + \frac{43'}{12} + \frac{39''}{12} = 11 \frac{11^{\circ}}{12} + 3 \frac{7'}{12} + 3 \frac{3''}{12}$$

Man hat hiernach umzurechnen:

$$\frac{11^{\circ}}{12} \text{ in Minuten und } \frac{7'}{12} \text{ in Sekunden.}$$

Nach Aufgabe 15 ist nämlich:

$$\frac{11^{\circ}}{12} = \frac{11}{12} \cdot 60' = 55'$$

und weiter:

$$\frac{7'}{12} = \frac{7}{12} \cdot 60'' = 35''$$

Also ist der ganze Winkel:

$$\begin{aligned} 143^{\circ} 43' 39'' \cdot \frac{1}{12} &= 11^{\circ} 55' + 3' 35'' + 3 \frac{1''}{4} \\ &= 11^{\circ} 58' 38,25'' \end{aligned}$$

Aufgabe 27. Ein Winkel von $167^{\circ} 52' 17''$ soll in 13 gleiche Teile geteilt werden.

Erkl. 150. Die Berechnung nimmt folgende Gestalt an:

$$\begin{array}{r} 167^{\circ} 52' 17'' : 13 = 12^{\circ} 54' 47 \frac{6}{13} \\ \underline{37} \\ 11 \cdot 60 + 52 = 712' \\ \underline{62} \\ 10 \cdot 60 + 17 = 617 \\ \underline{97} \\ 6 \end{array}$$

Auflösung. Analog der vorigen Aufgabe und nach der Berechnungsvorschrift in Erklärung 149 erhält man (siehe Erkl. 150):

$$167^{\circ} 52' 17'' \cdot \frac{1}{13} = 12^{\circ} 54' 47 \frac{6}{13}$$

Aufgabe 28. Welche aliquoten Teile des rechten Winkels lassen sich nicht in ganzen Zahlen von Graden, Minuten und Sekunden angeben und welchen Wert haben die einfachsten derselben?

Erkl. 151. Bei diesen Berechnungen fällt der Zuschlag vorhandener Minuten und Sekunden, wie er in der vorigen Aufgabe noch auftrat, weg, so dass die Ausrechnung noch einfacher wird, nämlich:

$$\begin{array}{r} 90^{\circ} : 7 = 12^{\circ} 51' 25 \frac{5}{7} \\ \underline{6^{\circ} = 360'} \\ \quad \underline{3' = 180''} \\ \quad \quad \underline{5} \\ 90^{\circ} : 11 = 8^{\circ} 10' 54 \frac{6}{11} \\ \underline{2^{\circ} = 120'} \\ \quad \underline{10' = 600''} \\ \quad \quad \underline{6} \\ 90^{\circ} : 13 = 6^{\circ} 55' 23 \frac{1}{13} \\ \underline{12^{\circ} = 720'} \\ \quad \underline{5' = 300''} \end{array}$$

Auflösung. Nach Aufgabe 7 lassen sich in ganzen Zahlen von Graden, Minuten und Sekunden nicht angeben diejenigen aliquoten Teile des rechten Winkels, deren Divisoren nicht bloss aus den Faktoren 2, 3, 5 bis zu $90 \cdot 3600$ bestehen. Es sind daher die einfachsten derselben:

$$\begin{array}{r} \frac{R}{7} = 12^{\circ} 51' 25 \frac{5}{7} \\ \frac{R}{11} = 8^{\circ} 10' 54 \frac{6}{11} \\ \frac{R}{13} = 6^{\circ} 55' 23 \frac{1}{13} \\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

Aufgabe 29. Man berechne die Grösse des Aussenwinkels des gleichwinkligen 81-Ecks (siehe Aufg. 24).

Erkl. 152. $360^{\circ} : 81 = 4^{\circ} 26' 40''$

$$\begin{array}{r} 360^{\circ} = 2160 \\ \underline{540} \\ 54' = 3240 \\ \underline{0} \end{array}$$

(Vergleiche auch Aufgabe 24.)

Auflösung. Da die Summe aller zusammengehörigen 81 Aussenwinkel gleich 360° sein muss, so ist einer der 81ste Teil des Vollwinkels, also nach der Berechnungsweise in den Erkl. 151 und 152:

$$4^{\circ} 26' 40''$$

Aufgabe 30. Wenn von zwei Nebenwinkeln der eine das 7 fache des andern ist — wie gross ist alsdann jeder der beiden Winkel?

Auflösung. Bezeichnet man den einen Winkel mit α , den andern mit β , so ist zunächst nach Lehrsatz 7:

$$1) \dots \alpha + \beta = 180^\circ$$

Ferner ist nach der Aufgabe:

$$2) \dots \alpha = 7 \cdot \beta$$

Setzt man den Wert von α aus Gleichung 2) in Gleichung 1) ein, so erhält man:

$$7\beta + \beta = 8\beta = 180^\circ$$

oder:

$$\beta = \frac{180^\circ}{8} = 22 \frac{1}{2}^\circ = 22^\circ 30'$$

Also ist von den beiden Winkeln der eine:

$$\beta = 22^\circ 30'$$

und der andere entweder $= 7 \cdot 22^\circ 30'$ oder auch $180^\circ - 22^\circ 30'$:

$$\alpha = 157^\circ 30'$$

Aufgabe 31. Von drei Winkeln α , β und γ sei:

$$\alpha = 14^\circ 29' 56''$$

$$\beta = 6,578^\circ$$

$$\gamma = 7825,5'$$

wie gross ist derjenige Winkel σ , welcher die Summe dieser drei Winkel bildet?

Auflösung. Nach der Aufgabe ist:

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma =$$

$$14^\circ 29' 56'' + 6,578^\circ + 7825,5'$$

Um diese Winkel zu addieren, verwandelt man entweder β und γ auch in Grad, Minuten und Sekunden, wie α — oder man verwandelt α und γ in Ganze und Bruchteile des Grades, wie β — oder endlich α und β zu Minuten, wie γ .

Erste Art:

$$\alpha = \dots\dots\dots 14^\circ 29' 56''$$

$$\beta = 6,578^\circ = 6^\circ 34' 40,8'' \quad 0,578 \cdot 60 = 34,68 \text{ und}$$

$$\gamma = 7825,5' = 130^\circ 25' 30'' \quad 0,68 \cdot 60 = 40,8$$

$$7825 : 60 = 130$$

$$\underline{25}$$

$$0,5' = 30''$$

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma = 151^\circ 30' 6,8''$$

Zweite Art:

$$\alpha = 14^\circ 29' 56'' = 14,49888\dots$$

$$29 : 60 = 0,48333\dots$$

$$56 : 3600 = 0,01555\dots$$

$$\frac{200}{200} \quad 0,49888\dots$$

$$\frac{200}{200}$$

$$\dots$$

$$\beta = \dots\dots\dots = 6,578^\circ$$

$$\gamma = 7825,5' = 130,425^\circ$$

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma = 151,501888\dots$$

$$7825,5 : 60 = 130,425$$

$$\frac{18}{18}$$

$$\frac{25}{25}$$

$$\frac{15}{15}$$

$$\frac{30}{30}$$

$$= 151^\circ 30' 6,8'' \quad 0,501888\dots \cdot 60 = 30,11333\dots$$

$$0,11333\dots \cdot 60 = 6,7999\dots$$

$$= 6,8$$

Auf die erste Art erhält man analog Aufgabe 18 für β und Aufgabe 13 für γ den Wert:

$$\sigma = 14^\circ 29' 56'' + 6^\circ 34' 40,8'' + 130^\circ 25' 30'' = 151^\circ 30' 6,8''$$

Auf die zweite Art erhält man analog Aufgabe 11 und 19 für α und Aufgabe 14 für γ den Wert:

$$\sigma = 14,49888\dots + 6,578 + 130,425 = 151,501888\dots$$

also nach Aufgabe 18 auch hier wieder:

$$\sigma = 151^\circ 30' 6,8''$$

Dritte Art:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 14^\circ 29' 56'' = 869,9333\ldots & 14 \cdot 60 &= 840 \\
 & & 29 &= 29 \\
 & & 56:60 &= 0,9333\ldots \\
 & & & \cdot 869,9333\ldots \\
 \beta &= 6^\circ,578 & & 6,578 \cdot 60 = 394,68 \\
 \gamma &= \dots\dots\dots & & \\
 \sigma &= \alpha + \beta + \gamma & & 9090:60 = 151 \\
 & & & \frac{309}{90} \quad \frac{0,1133\ldots \cdot 60}{= 6,7999\ldots} \\
 & & & \frac{30}{= 6,8}
 \end{aligned}$$

Vierte Art:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 14^\circ 29' 56'' = 52196'' & 56'' & 56'' \\
 & & 29 \cdot 60 & 1740 \\
 & & 14 \cdot 3600 & \left\{ \begin{array}{l} 8400 \\ 42 \end{array} \right. \\
 & & & 52196 \\
 \beta &= 6^\circ,578 & = 23680,8'' & 6,578 \cdot 3600 \\
 & & & 39468 \\
 & & & 19734 \\
 & & & 23680,8 \\
 \gamma &= 7825,5' & = 469530'' & 7825,5 \cdot 60 = 469530 \\
 \sigma &= \alpha + \beta + \gamma & = 545406,8'' & 545406,8 : 3600 = 151 \\
 & & = 151^\circ 30' 6,8'' & \frac{185}{54} \\
 & & & \frac{1806,8}{6,8} : 60 = 30
 \end{aligned}$$

Auf die dritte Art erhält man analog Aufgabe 15 für α und Aufgabe 18 für β den Wert:

$$\sigma = 869,9333\ldots + 394,68 + 7825,5 = 9090,11333\ldots$$

also nach Aufgabe 15 auch hier wieder:

$$\sigma = 151^\circ 30' 6,8''$$

Endlich könnte man dieselbe Aufgabe lösen, indem man alle drei Winkel in Sekunden verwandelt. Dann wird nach Aufgabe 1:

$$\sigma = 52196'' + 23680,8'' + 469530'' = 545406,8''$$

also nach Aufgabe 22 wiederum:

$$\sigma = 151^\circ 30' 6,8''$$

(Vergleiche die Ausführungen der Berechnungen in Erkl. 153 bis 158.)

Aufgabe 32. Ein Winkelschenkel soll einen Winkel von $72^\circ 13''$ beschreiben; wie gross ist der Rest der Drehung, wenn der Winkelschenkel schon $2149,3'$ durchlaufen hat?

Erkl. 159. Die Umrechnung der $2149,3'$ in Grad, Minuten und Sekunden ergibt:

$$\begin{aligned}
 2149,3' : 60 &= 35^\circ 49,3' \\
 \frac{34}{49} & \quad 0,3 \cdot 60 = 18 \\
 & = 35^\circ 49' 18''
 \end{aligned}$$

Und dann:

$$\begin{aligned}
 & 72^\circ 13'' - 35^\circ 49' 18'' \\
 & = 71^\circ 60' 13'' - 35^\circ 49' 18'' \\
 & = 71^\circ 59' 73'' - 35^\circ 49' 18'' \\
 & = 35^\circ 10' 55''
 \end{aligned}$$

Ähnlich wäre etwa:

$$\begin{aligned}
 & 83^\circ 17' 22'' \\
 & = 82^\circ 77' 22'' \\
 & = 82^\circ 76' 82''
 \end{aligned}$$

Auflösung. Bezeichnet man die noch übrige Drehungsgrösse mit x , so ist nach der Aufgabe:

$$x = 72^\circ 13'' - 2149,3'$$

Drückt man die durchlaufene Drehungsgrösse von $2149,3'$ in Grad, Minuten und Sekunden aus, so erhält man nach Aufgabe 13 und Erkl. 159:

$$x = 72^\circ 13'' - 35^\circ 49' 18''$$

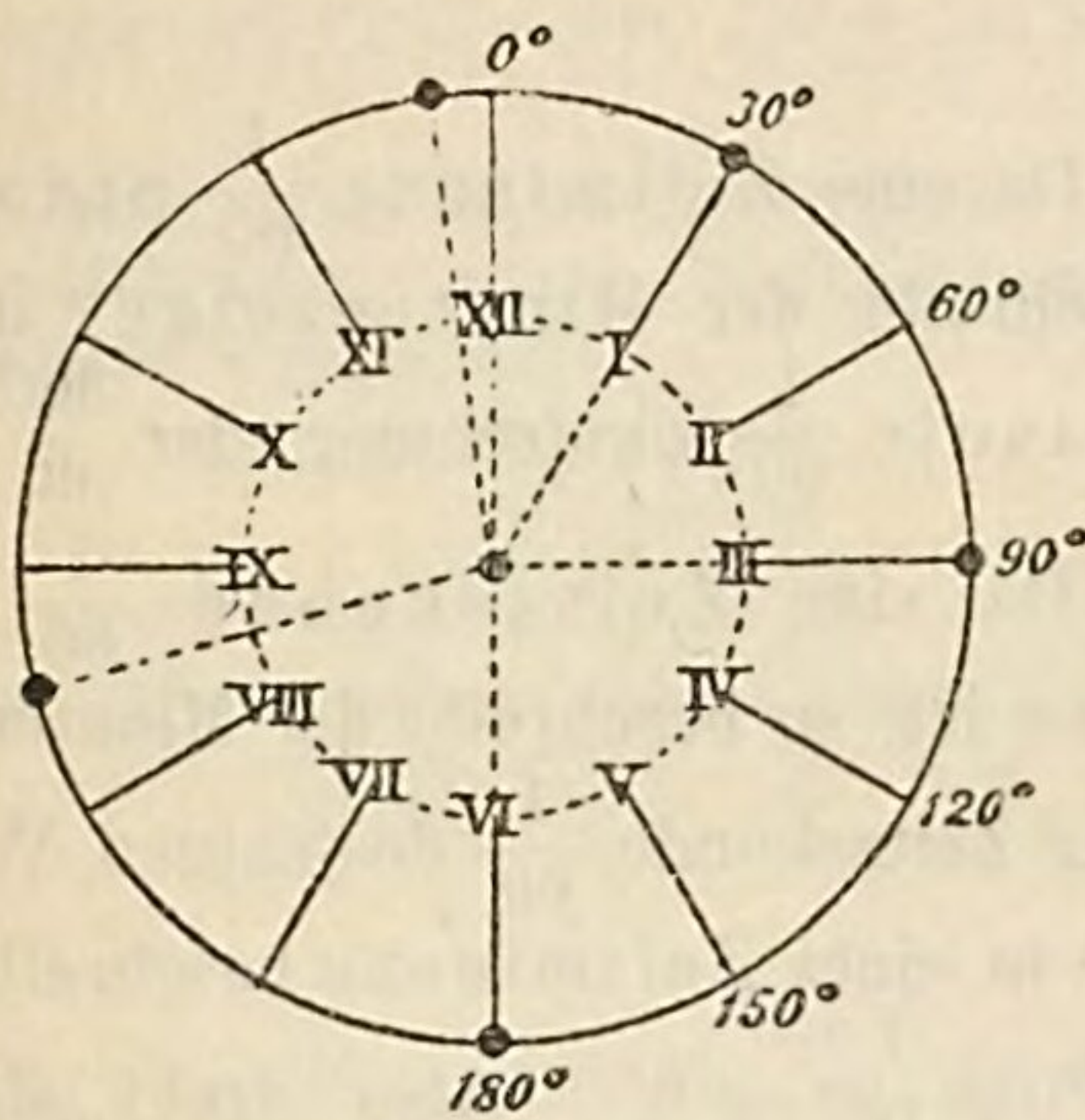
Um diese Subtraktion ausführen zu können, muss der Minuendus $72^\circ 13''$ in eine ebenfalls Grade, Minuten und Sekunden enthaltende Form übergeführt werden; dies geschieht, indem einer der 72 Grade weggenommen und in $60'$ verwandelt wird. Demnach ist der Minuendus:

$$71^\circ 60' 13''$$

Da aber der Subtrahendus 18 enthält, so müssen die Sekundenziffern des Minuendus über die Zahl 18 gebracht werden, damit die Subtraktion möglich wird. Dazu wird von den 60 Minuten wieder eine weggenommen und in der Form von $60''$ zu den schon vorhandenen $13''$ zugeschlagen. Dadurch erhält der Minuendus die Form:

$$71^\circ 59' 73''$$

Figur 63.



4) Um 1 Uhr trennt die beiden Zeiger ein Zwischenraum vom 12ten Teil der ganzen Umdrehung, also bilden sie um 1 Uhr einen Winkel von $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.

5) Um $8\frac{1}{2}$ Uhr steht der Minutenzeiger auf VI, der Stundenzeiger in der Mitte zwischen VIII und IX, also ist der Zwischenraum das $2\frac{1}{2}$ fache des Zwischenraums zweier Ziffern, daher nach dem vorigen das $2\frac{1}{2}$ fache von 30° ; also bilden die Zeiger um $8\frac{1}{2}$ Uhr einen Winkel von $\frac{5 \cdot 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

6) Um $11\frac{3}{4}$ Uhr steht der Minutenzeiger auf IX, der Stundenzeiger steht zwischen XI und XII und hat $\frac{3}{4}$ dieses Zwischenraums durchlaufen. Demnach ist der Zwischenraum der beiden Zeiger das $2\frac{3}{4}$ fache des Zwischenraums zweier Ziffern oder $2\frac{3}{4} \cdot 30^\circ$.

Also bilden die Zeiger um $11\frac{3}{4}$ Uhr einen Winkel von $\frac{11}{4} \cdot 30^\circ = 82\frac{1}{2}^\circ = 82^\circ 30'$.

Aufgabe 36. Zu welcher vollen Stunde bilden die Uhrzeiger:

- 1) einen Winkel von 120°
- 2) zu welcher halben Stunde einen Winkel von 15° ?

Erkl. 162. Weitere Aufgaben, bei welchen die Zeit erfragt wird, zu welcher die Uhrzeiger einen vorgeschriebenen Winkel bilden, erfordern die Lösung einer Gleichung. Man sehe dieselben Aufgaben in Kleyers „Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten“.

Auflösung. Da nach der vorigen Aufgabe der Zwischenraum je zweier Ziffern auf dem Zifferblatt 30° beträgt, so bilden die Uhrzeiger:

1) einen Winkel von 120° , wenn ihr Abstand gleich dem 4-fachen eines solchen Zwischenraumes ist, gemessen von XII aus: also bilden die Zeiger einen Winkel von 120° um 4 Uhr und um 8 Uhr.

2) Einen Winkel von 15° bilden die Zeiger, wenn der Abstand gleich der Hälfte eines solchen Zwischenraums zweier Ziffern ist gemessen von VI aus: also bilden die Zeiger einen Winkel von 15° um $5\frac{1}{2}$ Uhr und um $6\frac{1}{2}$ Uhr.

Aufgabe 37. Um wie viel Grade dreht sich der Minutenzeiger einer Uhr in:

- 1) einer Stunde
- 2) einer $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$ Stunde
- 3) einer Zeitminute
- 4) einer Zeitsekunde?

Auflösung. 1) In einer Stunde macht der Minutenzeiger eine ganze Umdrehung, beschreibt also einen Vollwinkel von 360° .

2) in einer $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$ Stunde macht der Minutenzeiger den halben, vierten,

... n ten Teil einer ganzen Umdrehung, beschreibt also einen Winkel von $\frac{360}{2}, \frac{360}{4}, \dots, \frac{360}{n}$ Winkelgrad, oder $180^\circ, 90^\circ, \dots, \frac{360^\circ}{n}$.

3) Da eine Zeitminute $\frac{1}{60}$ Stunde ist, so beschreibt der Minutenzeiger in einer Zeitminute $\frac{1}{60}$ Umdrehung oder $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$.

4) Da eine Zeitsekunde $\frac{1}{60}$ Zeitminute ist, so beschreibt der Minutenzeiger in einer Zeitsekunde $\frac{1}{60}$ desjenigen Winkels, den er in einer Zeitminute beschreibt, also $\frac{1}{60} \cdot 6^\circ = \frac{1^\circ}{10} = 6'$. Also dreht sich der Minutenzeiger in einer Zeitsekunde um 6 Winkelminuten.

Aufgabe 38. In welcher Zeit dreht sich der Minutenzeiger einer Uhr um:

- 1) $60^\circ, \dots, n^\circ$
- 2) $1^\circ, 1', 1''$?

Erkl. 163. Die Beantwortung der im zweiten Teile dieser Aufgabe gestellten Frage ist geeignet ein Bild davon zu geben, wie ausserordentlich klein ein Winkel von $1'$ oder gar erst von $1''$ ist. Man erkennt daran, dass eine genaue und nicht bloss symbolische Zeichnung eines solchen Winkels geradezu unmöglich ist, da jeder Strich allein schon den Winkelraum des ganzen Winkels durch seine Breite ausfüllt.

Auflösung. 1) Da der Minutenzeiger sich in einer Stunde um 360° dreht, so braucht er zur Drehung um 1° die Zeit von $\frac{1}{360}$ Stunde, also zur Drehung um $60^\circ, \dots, n^\circ$ die Zeit von $\frac{60}{360}, \dots, \frac{n}{360}$ Stunden oder von $\frac{1}{6}, \dots, \frac{n}{360}$ Stunde. Da aber eine Stunde 60 Zeitminuten hat, so kann man auch sagen, der Zeiger dreht sich um 60° oder um n° in der Zeit von 10 Minuten oder von $\frac{n}{6}$ Minuten.

2) Zu einem Winkelgrad braucht der Minutenzeiger nach vorigem $\frac{1}{360}$ Stunde oder $\frac{1}{6}$ Zeitminute; also macht er die Drehung um eine Winkelminute im 60sten Teile dieser Zeit oder in $\frac{1}{360}$ Zeitminute und zur Drehung um eine Winkelsekunde braucht er gar davon wieder bloss den 60sten Teil oder $\frac{1}{21600}$ Zeitminute.

Aufgabe 39. Wie gross ist der Supplementwinkel eines Winkels von:

- 1) $114^{\circ} 43' 19''$
- 2) $g^{\circ} m' s''$
- 3) von x° , $(180 - x)^{\circ}$, $(90 \pm x)^{\circ}$?

Erkl. 164. Nach Erkl. 159 und 160 werden die nebenstehend geforderten Subtraktionen folgendermassen ausgeführt:

$$\begin{array}{r} 1) \quad 180^{\circ} = 179^{\circ} 59' 60'' \\ \quad \quad 114^{\circ} 43' 19'' \\ \hline \quad \quad 65^{\circ} 16' 41'' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3) \quad 180^{\circ} - (180 - x)^{\circ} = 180^{\circ} - 180^{\circ} + x^{\circ} = x^{\circ} \\ \quad 180^{\circ} - (90 \pm x)^{\circ} = 180^{\circ} - 90^{\circ} \mp x^{\circ} \\ \quad \quad \quad = 90^{\circ} \mp x^{\circ} \end{array}$$

Aufgabe 39a. Bestimme den Komplementwinkel eines Winkels von:

- 1) $48^{\circ} 59' 21''$
- 2) $g^{\circ} m' s''$
- 3) von x° , $(90 - x)^{\circ}$, $(45 \pm x)^{\circ}$

Erkl. 165. Die nebenstehende Aufgabe erfordert folgende Subtraktionen nach Angabe von Erkl. 159 und 160:

$$\begin{array}{r} 1) \quad 90^{\circ} 59' 60'' \\ \quad \quad 48^{\circ} 59' 21'' \\ \hline \quad \quad 41^{\circ} 0' 39'' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3) \quad 90^{\circ} - (90 - x)^{\circ} = 90^{\circ} - 90^{\circ} + x^{\circ} = x^{\circ} \\ \quad 90^{\circ} - (45 \pm x)^{\circ} = 90^{\circ} - 45^{\circ} \mp x^{\circ} \\ \quad \quad \quad = 45^{\circ} \mp x^{\circ} \end{array}$$

Aufgabe 40. Von zwei Nebenkanten sei der eine das Doppelte (allgemein das n -fache) des andern. Wie viel Grad hat jeder von beiden?

Auflösung. Der Supplementwinkel eines Winkels ist nach Antwort 19 und Erklärung 52 die Ergänzung zu 180° . Also hat man jeden der genannten Winkel von 180° abzuziehen und erhält nach Erkl. 164 als:

$$\begin{array}{l} \text{Supplementwinkel von } 114^{\circ} 43' 19'' = 65^{\circ} 16' 41'' \\ \text{Supplement eines Winkels von } g^{\circ} m' s'' \\ \quad \quad \quad = (179 - g)^{\circ} (59 - m)' (60 - s)'' \\ \text{Supplementwinkel von } x^{\circ} = (180 - x)^{\circ} \\ \text{Supplementwinkel von } (180 - x)^{\circ} = x^{\circ} \\ \text{Supplementwinkel von } (90 \pm x)^{\circ} = (90 \mp x)^{\circ} \end{array}$$

Auflösung. Der Komplementwinkel eines Winkels ist nach Antwort 19 und Erklärung 52 die Ergänzung zu 90° . Also hat man jeden der genannten Winkel von 90° abzuziehen und erhält nach Erkl. 165 als:

$$\begin{array}{l} \text{Komplementwinkel von } 48^{\circ} 59' 21'' = 41^{\circ} 39'' \\ \text{Komplement zu } g^{\circ} m' s'' \\ \quad \quad \quad = (89 - g)^{\circ} (59 - m)' (60 - s)'' \\ \text{Komplementwinkel zu } x^{\circ} = (90 - x)^{\circ} \\ \text{Komplement zu } (90 - x)^{\circ} = x^{\circ} \\ \text{Komplementwinkel zu } (45 \pm x)^{\circ} = (45 \mp x)^{\circ} \end{array}$$

Auflösung. Bezeichnet man die Anzahl Grade des kleineren Winkels mit x° , so hat der andere Winkel $2 \cdot x^{\circ}$ (allgemein $n \cdot x^{\circ}$). Da also beide Winkel Nebenkanten sind, so muss ihre Summe 180° ergeben. Demnach hat man die Gleichung:

$$x^{\circ} + 2 \cdot x^{\circ} = 180^{\circ}$$

Und demnach wird:

$$3x = 180$$

also durch Division mit 3:

$$x = 60^{\circ}$$

Also hat der eine Winkel 60° , der andere doppelt so viel, nämlich 120° , und als Nebenkanten haben beide zusammen 180° .

Für den allgemeinen Fall wird die Gleichung:

$$x + n \cdot x = 180$$

Und indem man x vor eine Klammer setzt:

$$x(n+1) = 180$$

also durch Division mit $n+1$:

$$x = \frac{180}{n+1}$$

Hierbei erhält der eine Winkel $\frac{180}{n+1}$,
der andere Winkel das n -fache, also:

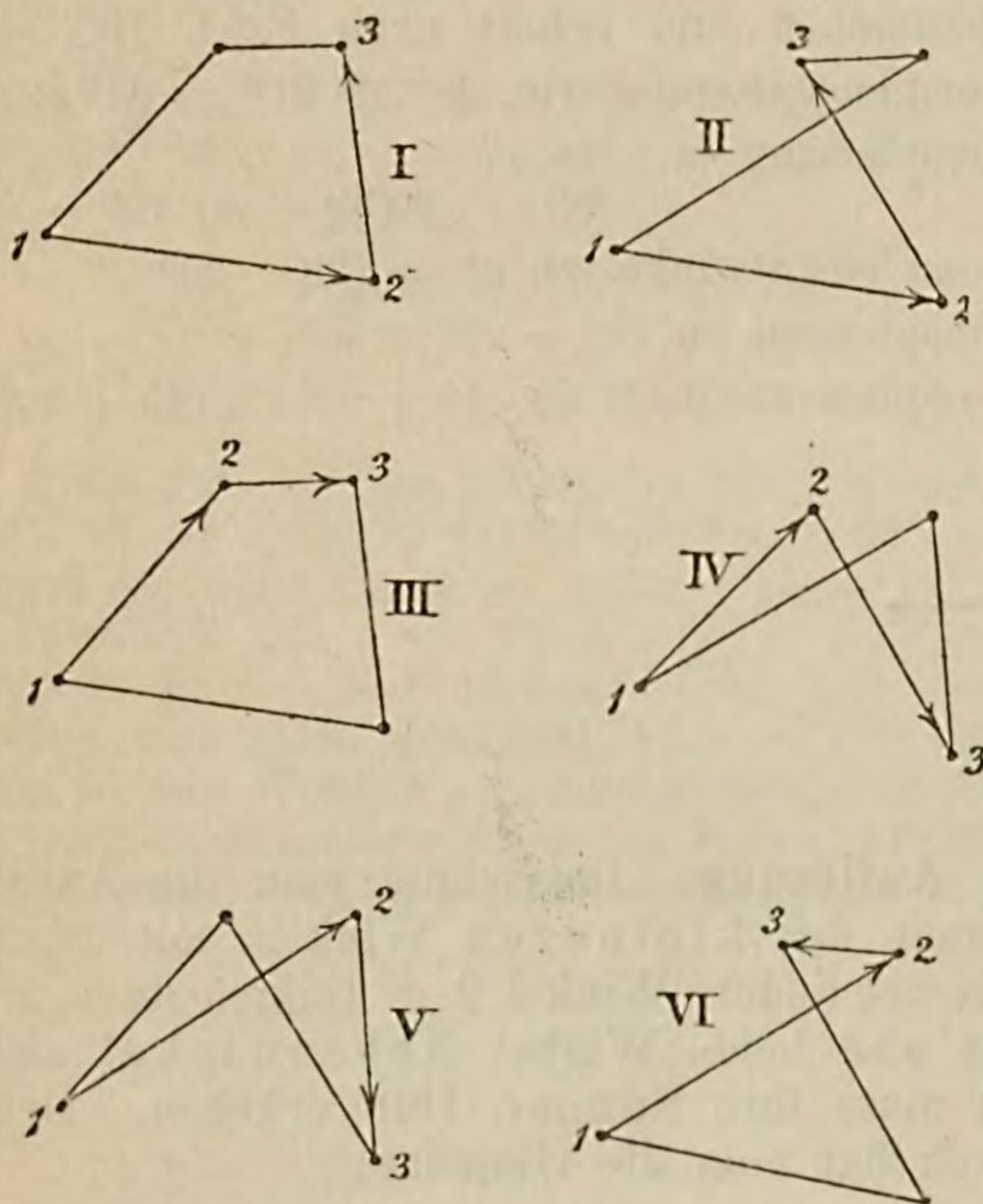
$$\frac{n}{n+1} \cdot 180^\circ$$

und beide zusammen:

$$\frac{180}{n+1} + \frac{n \cdot 180}{n+1} = \frac{180(1+n)}{n+1} = 180^\circ$$

Aufgabe 41. Auf wie vielfache Weise kann man aus vier gegebenen Punkten ein Viereck erhalten?

Figur 64.



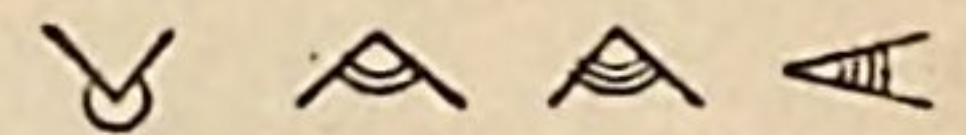
Auflösung. Nach Antwort 34 erhält man ein Viereck, indem man einen beliebigen der vier Punkte als Anfangspunkt wählt und ihn mit einem der drei andern verbindet. Demnach ist für die erste Seite des Vierecks dreifache Auswahl. Der zweite Eckpunkt ist alsdann noch mit einem der zwei übrigen Punkte zu verbinden. Dadurch ist für jeden der drei zuerst möglichen Fälle der ersten Seite noch zweifache Auswahl der zweiten Seite möglich. Die dritte Seite muss aber dann nach dem allein noch übrigen vierten Punkte und die vierte Seite muss von da wieder nach dem ersten Punkte führen. Demnach wäre die Anzahl der Möglichkeiten $3 \cdot 2 = 6$. Da man aber kein verschiedenes Viereck erhält, wenn je die letzte Seite desselben als erste gewählt würde, so sind je zwei der sechs erhaltenen Figuren wieder gleich, und die Anzahl der verschiedenen Vierecke beschränkt sich auf $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ (siehe Fig. 64).

Also lassen sich vier gegebene Punkte in dreifacher Weise zu einem Viereck verbinden.

Erkl. 166. In Figur 64 haben je zwei nebeneinander liegende Figuren die gleiche erste Seite, aber verschiedene zweite Seite. Aber obgleich die Figuren I und III verschiedene erste Seiten haben, ist ihre Gestalt doch identisch, da die erste, zweite... Seite von I gleich der letzten, vorletzten... Seite von III ist. Und die drei verschiedenen Figuren sind 1) $I = III$, 2) $II = VI$, 3) $IV = V$. Beide letztere sind „überschlagen“.

Figur 65.

Espr. St. R. Sp.



	I	a)	1	1	0	2
	II	b)	1	0	1	2
	III	c)	1	0	0	3
	IV	d)	0	3	0	1
	V	e)	0	2	1	1
	VI	f)	0	2	0	2
	VII	g)	0	1	2	1
	VIII	h)	0	1	1	2
	IX	i)	0	1	0	3
	X	k)	0	0	4	0

Aufgabe 42. Wie viele Arten von Vierecken kann es geben in Rücksicht der Anzahl ihrer einspringenden, stumpfen, rechten und spitzen Winkel?

Erkl. 167. In Fig. 65, I bis X sind die zehn Fälle a) bis k) aufgeführt und daneben die Winkelgattungen nach ihrer Anzahl zusammengestellt, die einspringenden mit einem, die stumpfen mit zwei, die rechten mit drei, die spitzen mit vier Bögen.

Auflösung. Da die Summe der Innenwinkel eines Vierecks nach Lehrsatz 13 gleich vier Rechten ist, so können jedenfalls nicht zwei Winkel über 180° vorkommen. Ist ein solcher vorhanden, so können dazu wegen des für den dritten und vierten Winkel nötigen Restes wieder nicht zwei Winkel über 90° oder $= 90^\circ$ hinzutreten, sondern nur einer, also entweder:

a) ein stumpfer und zwei spitze, oder

b) ein rechter und zwei spitze; oder gar keiner über oder $= 90^\circ$, sondern

c) drei spitze Winkel.

Hat das Viereck keinen einspringenden Winkel, dann könnte es

d) drei stumpfe Winkel haben und als vierten einen spitzen; oder

e) zwei stumpfe, einen rechten und einen spitzen Winkel; oder

f) zwei stumpfe und zwei spitze Winkel.

Ist aber nur ein stumpfer Winkel vorhanden, so ist auf die drei übrigen Winkel noch etwas über zwei rechten Winkeln zu verteilen, also entweder

g) zwei rechte Winkel und als vierter ein spitzer mit eben diesem Ueberschuss der Restsumme über 180° ; oder

h) ein rechter Winkel und zwei spitze, oder

i) drei spitze Winkel.

Soll endlich kein stumpfer Winkel vorhanden sein, so müssen sich die vier Winkel in 360° teilen, ohne dass einer über 90° erhalten darf; dies ist aber nicht anders möglich, als dass sich

k) vier rechte Winkel bilden.

Aufgabe 43. Die in den Antworten auf die Fragen 38 und 41 für das Vieleck von 3- bis 6-Ecken angegebenen Winkelwerte sollen für die Vielecke von 7-, 8-, 9-, 10-, 11-, 12-Ecken fortgesetzt werden.

Erkl. 168. Die allgemeinen Formeln, nach welchen die nebenstehenden Aussagen zu berechnen sind, lauten nach den vorstehend angegebenen Antworten folgendermassen:

Ein Vieleck von n Ecken hat die Innenwinkelsumme:

$$(2n - 4) R = (n - 2) 180^\circ$$

Ein Vieleck von n Ecken hat höchstens $n - 3$ einspringende Winkel.

Ein gleichwinkliges Vieleck von n Ecken hat als einzelnen Aussenwinkel:

$$\frac{4 R}{n} = \frac{360^\circ}{n}$$

und als einzelnen Innenwinkel:

$$\frac{2n - 4}{n} \cdot R = \left(1 - \frac{2}{n}\right) 180^\circ$$

Erkl. 169. Die Ausrechnung der Ziffern für das 7-Eck und 11-Eck geschieht analog Aufgabe 28.

Auflösung. In derselben Weise, wie in den nebenstehend angeführten Antworten verfahren wurde, ermittelt man, dass die Summe der Innenwinkel beträgt beim

$$7\text{-Eck} \dots 10 R = 5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$$

$$8\text{-Eck} \dots 12 R = 6 \cdot 180^\circ = 1080^\circ$$

$$9\text{-Eck} \dots 14 R = 7 \cdot 180^\circ = 1260^\circ$$

$$10\text{-Eck} \dots 16 R = 8 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$$

$$11\text{-Eck} \dots 18 R = 9 \cdot 180^\circ = 1620^\circ$$

$$12\text{-Eck} \dots 20 R = 10 \cdot 180^\circ = 1800^\circ$$

Ferner findet man, dass für diese sechs Vielecke die Anzahl einspringender Winkel höchstens 4, 5, 6, 7, 8, 9 betragen kann.

Sind die Vielecke gleichwinklig, so erhält man als Werte für einen einzelnen

Aussenwinkel:

$$7\text{-Eck} \dots \frac{360^\circ}{7} = 51^\circ 25' 42 \frac{6}{7}''$$

$$8\text{-Eck} \dots \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$9\text{-Eck} \dots \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

$$10\text{-Eck} \dots \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

$$11\text{-Eck} \dots \frac{360^\circ}{11} = 32^\circ 43' 38 \frac{2}{11}''$$

$$12\text{-Eck} \dots \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

Innenwinkel:

$$7\text{-Eck} \dots \frac{10}{7} R = 128^\circ 34' 17 \frac{1}{7}''$$

$$8\text{-Eck} \dots \frac{3}{2} R = 135^\circ$$

$$9\text{-Eck} \dots \frac{14}{9} R = 140^\circ$$

$$10\text{-Eck} \dots \frac{8}{5} R = 144^\circ$$

$$11\text{-Eck} \dots \frac{18}{11} R = 147^\circ 16' 21 \frac{9}{11}''$$

$$12\text{-Eck} \dots \frac{5}{3} R = 150^\circ$$

Aufgabe 44. Auf wie vielfache Weise kann man 5 gegebene Punkte zu einem Fünfeck, oder allgemein n gegebene Punkte zu einem n Eck verbinden?

Erkl. 170. Bei Zahlenausdrücken von der nebenstehenden Gestalt pflegt man der leichteren Uebersichtlichkeit wegen die Zahl 1 als Faktor beizufügen, also oben fürs Fünfeck:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} \text{ statt } \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2}$$

und ebenso für das allgemeine n Eck:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-3)(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2}$$

statt bloss:

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n-1)}{2}$$

Auflösung. Ist der erste Punkt gewählt, so ist für die erste Seite zunächst vierfache Auswahl, zu jeder derselben für die zweite Seite noch dreifache Auswahl, endlich für die dritte Seite noch je zweifache Auswahl, so dass wieder $4 \cdot 3 \cdot 2$ Umläufe durch die fünf Punkte möglich sind. Da aber wieder für jede Umlaufsrichtung eines Fünfecks zwei gleiche Figuren entstehen, so hat man unter fünf gegebenen Punkten $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12$ der Gestalt nach verschiedene Fünfecke.

Sind n Punkte gegeben, so bleiben nach Wahl des ersten Punktes $n-1$ Punkte zur Auswahl für die erste Seite; ist der zweite Punkt ausgewählt, so bleiben wieder $n-2$ Endpunkte für die zweite Seite und so weiter bis zur drittletzten Seite, für welche noch zwei Punkte zur Auswahl bleiben. Ist davon einer gewählt, so muss die zweitletzte Seite nach dem einzig übrigen Punkte gehen, und die letzte muss von da zum ersten Punkte zurück. Die ganze Zahl von $(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots \cdot 3 \cdot 2$ verschiedenen Umläufen unter den n -Punkten muss aber wegen der unter sich zu je zweien gleichen Figuren halbiert werden, also bleiben unter n gegebenen Punkten:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-3)(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2}$$

verschiedene n Ecke möglich.

Aufgabe 45. Wie viele Ecken hat ein Vieleck, von dem man weiss, dass jeder einzelne seiner Innenwinkel 165° hat?

Auflösung 1. Bezeichnet man die Eckenzahl des Vielecks mit n , so ist dasselbe laut Aufgabe ein gleichwinkliges; da also sein Innenwinkel $= 165^\circ$ ist, so hat man die Gleichung (nach Antwort auf Frage 41):

$$\frac{2n-4}{n} \cdot R = 165^\circ$$

Erkl. 171. Nach Aufgabe 10 könnte man auch statt 165° in der Gleichung einsetzen:

$$165 \cdot \frac{1}{90} R = \frac{11}{6} R$$

dann fiele R heraus und es entstünde dieselbe Gleichung in der Form:

$$\begin{aligned} \frac{2n-4}{n} &= \frac{11}{6} \\ 2 - \frac{4}{n} &= \frac{11}{6} \\ \frac{4}{n} &= \frac{12}{6} - \frac{11}{6} = \frac{1}{6} \\ n &= 24 \end{aligned}$$

Setzt man hierin für $R = 90^\circ$, kürzt mit 15 und erweitert mit n , so erhält man:

$$(2n-4)6 = 11 \cdot n$$

Also durch Auflösung der Gleichung:

$$12n - 24 = 11n$$

$$n = 24$$

Also ist das erfragte Vieleck ein 24-Eck.

Auflösung 2. Da das Vieleck ein gleichwinkliges ist, und ein Innenwinkel $= 165^\circ$ ist, so muss jeder Aussenwinkel $= 180^\circ - 165^\circ = 15^\circ$ sein. Also kann man auch nach Antwort auf Frage 41 die Gleichung bilden:

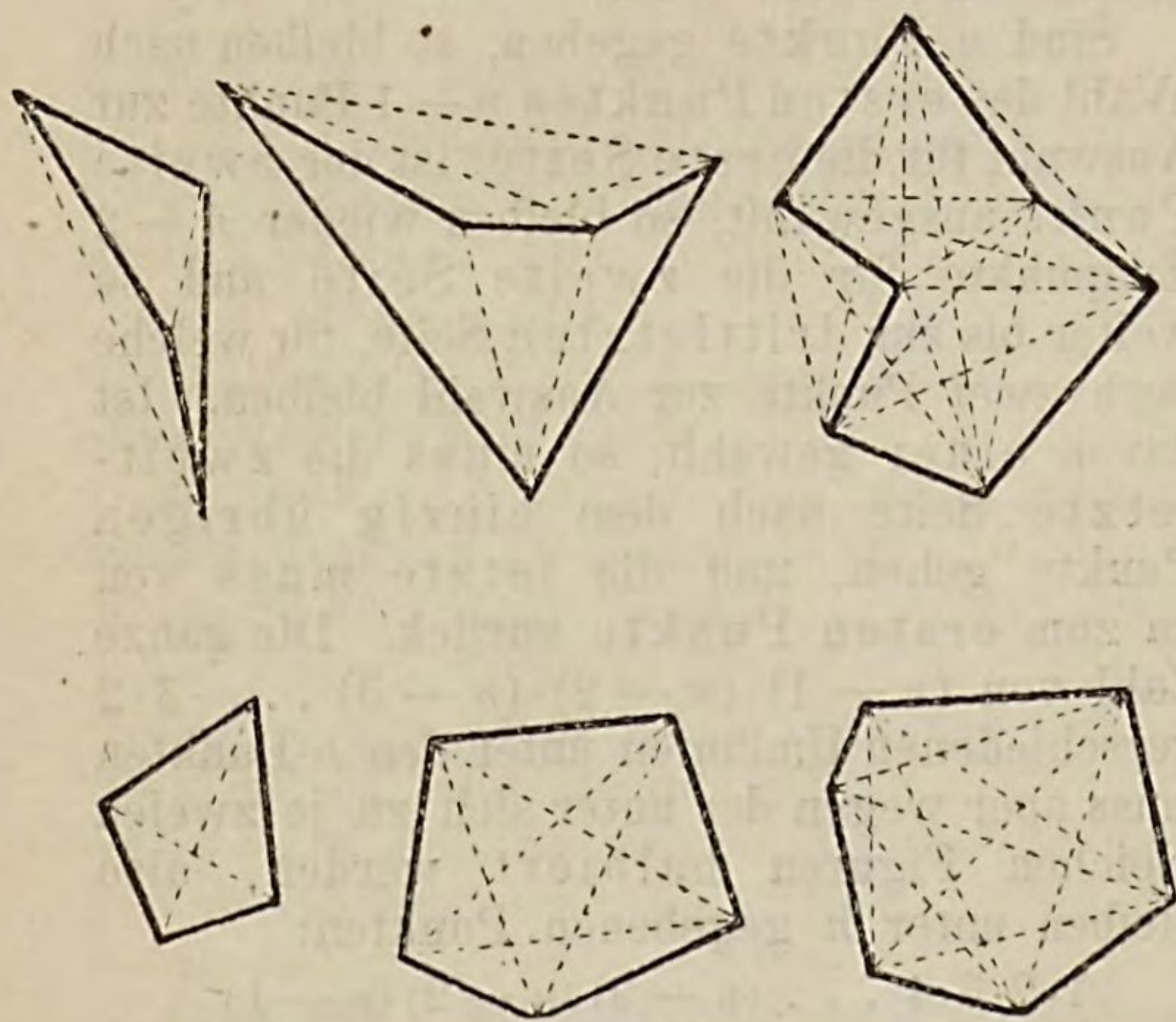
$$\frac{360}{n} = 15^\circ$$

Und daraus erhält man, wie oben:

$$n = \frac{360}{15} = 24$$

Aufgabe 46. Wie viele Diagonalen hat ein Vieleck von 4, 5, 6..., allgemein von n Ecken?

Figur 66.



Erkl. 172. Wegen der Schreibweise:

$$\frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}$$

statt bloss:

$$\frac{1}{2} \cdot n(n-3)$$

gilt dasselbe, was in Erkl. 170 ausgeführt wurde.

Erkl. 173. Aus Figur 66 ist die Bestätigung des in Erkl. 78 Gesagten zu entnehmen, dass nämlich bei einspringenden Winkeln der Vielecke die Diagonalen ausserhalb des Vielecks liegen.

Auflösung. Da das Vieleck selbst durch 4, 5, 6... n Punkte gegeben ist und jeder von diesen Punkten durch die beiden in ihnen aneinanderstossenden Seiten bereits mit zwei weiteren Punkten verbunden ist, so kann jeder Punkt ausserdem noch mit sovielen Punkten verbunden werden, als die um ihn selbst und um seine beiden benachbarten Ecken, also im ganzen um drei Punkte verminderte Anzahl aller vorhandenen Punkte beträgt. Demnach hätte man für ein Vieleck von n Ecken aus jedem der n Punkte $n-3$ Diagonalen, im ganzen $n(n-3)$ Diagonalen zu ziehen. Darunter ist aber jede Diagonale doppelt gezählt, nämlich einmal von der einen Ecke zur andern und dann nochmals von dieser andern Ecke wieder zur ersten. Die wirkliche Anzahl beträgt also wieder nur die Hälfte der vorigen Zahl, nämlich beim n Eck:

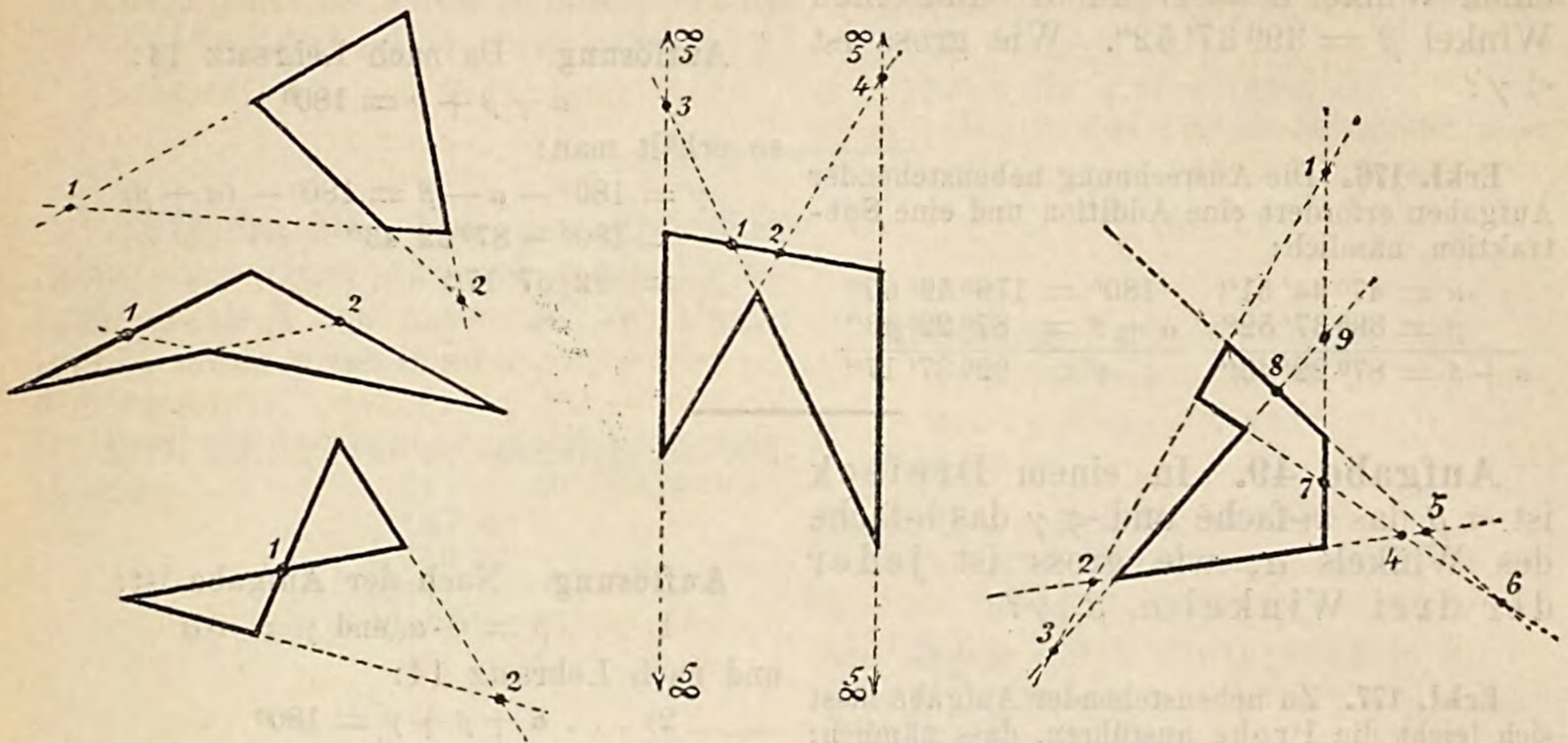
$$\frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}$$

Entsprechend findet man als Anzahl der Diagonalen im

4-Eck:	5-Eck:	6-Eck:	7-Eck:
$\frac{4 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 2;$	$\frac{5 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 5;$	$\frac{6 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 9;$	$\frac{7 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 14$

(siehe Figur 66).

Figur 67.



Aufgabe 47. In wie viel Punkten ausser den Eckpunkten können sich die Seiten eines Vielecks (oder deren Verlängerungen) noch schneiden?

Erkl. 174. Sind zwei Seiten eines Vielecks parallel, so ist nach Erkl. 110 ihr unendlich ferner Punkt als Schnittpunkt in die Ziffern der nebenstehenden Ueberlegungen einzurechnen (vergl. das Fünfeck in Figur 67).

Erkl. 175. Die Ergebnisse der Aufgaben 46 und 47 gelten vermöge der Allgemeinheit ihrer Ueberlegungen auch für Vielecke mit einspringenden Winkeln und für überschlagene Vielecke, wie solches aus Figur 67, z. B. für 4-Eck, 5-Eck und 6-Eck, zu ersehen ist.

Auflösung. Da jede Gerade einer Ebene von jeder andern Geraden derselben Ebene bei genügender Verlängerung in einem Punkte geschnitten wird, so wird jede Seite eines Vielecks von den zwei benachbarten Seiten in den auf ihr liegenden Ecken und von jeder übrigen Seite noch in einem Punkte geschnitten. Hat also das Vieleck $4, 5 \dots n$ Ecken, so wird jede Seite noch von so vielen andern Seiten geschnitten, als die um sie selbst und um ihre beiden benachbarten Seiten, also im ganzen um drei Punkte verminderte Anzahl aller vorhandenen Seiten beträgt. Demnach hätte man bei einem Vieleck mit n Seiten auf jeder dieser n Seiten ausser den zwei Ecken noch $n - 3$ weitere Schnittpunkte. Darunter ist aber jeder Schnittpunkt doppelt gezählt, nämlich einmal als Schnittpunkt der einen Linie mit der andern und dann wieder als Schnittpunkt dieser andern mit der ersten. Die wirkliche Anzahl von Schnittpunkten beträgt also nur die Hälfte der vorigen Zahl, nämlich beim n Eck:

$$\frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}$$

Entsprechend finden sich die Zahlen der Schnittpunkte der Seiten ausser den Eckpunkten im

4-Eck:	5-Eck:	6-Eck:
= 2;	= 5;	= 9

nämlich genau gleich der in voriger Aufgabe ermittelten Anzahl von Diagonalen (siehe Figur 67).

Aufgabe 48. Ein Dreieck hat einen Winkel $\alpha = 47^\circ 44' 51''$ und einen Winkel $\beta = 39^\circ 37' 52''$. Wie gross ist $\angle \gamma$?

Erkl. 176. Die Ausrechnung nebenstehender Aufgaben erfordert eine Addition und eine Subtraktion, nämlich:

$$\begin{array}{r} \alpha = 47^\circ 44' 51'' \\ \beta = 39^\circ 37' 52'' \\ \hline \alpha + \beta = 87^\circ 22' 43'' \end{array} \quad \begin{array}{r} 180^\circ = 179^\circ 59' 60'' \\ \alpha + \beta = 87^\circ 22' 43'' \\ \hline \gamma = 92^\circ 37' 17'' \end{array}$$

Aufgabe 49. In einem Dreieck ist $\angle \beta$ das m -fache und $\angle \gamma$ das n -fache des Winkels α ; wie gross ist jeder der drei Winkel α , β , γ ?

Erkl. 177. Zu nebenstehender Aufgabe lässt sich leicht die Probe ausführen, dass nämlich:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{180}{1+m+n} + \frac{m \cdot 180}{1+m+n} + \frac{n \cdot 180}{1+m+n} = \frac{180(1+m+n)}{1+m+n} = 180^\circ$$

Aufgabe 50. Ein Dreieck hat zwei gleich grosse Winkel von $53^\circ 27' 43''$; wie gross ist der dritte Winkel?

Aufgabe 51. Ein Dreieck hat einen Winkel $\gamma = 147^\circ 29' 38''$ und ausserdem zwei gleich grosse Winkel. Wie gross sind die beiden letzteren?

Erkl. 178. Die Berechnung der beiden letzten Aufgaben lässt sich auf zweifache Art ausführen, wie solches in den nebeneinander stehenden Teilen der Auflösung angegeben ist.

Auflösung. Da nach Lehrsatz 14:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - (\alpha + \beta) \\ &= 180^\circ - 87^\circ 22' 43'' \\ &= 92^\circ 37' 17'' \end{aligned}$$

Auflösung. Nach der Aufgabe ist:

$$1) \dots \beta = m \cdot \alpha \text{ und } \gamma = n \cdot \alpha$$

und nach Lehrsatz 14:

$$2) \dots \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Also erhält man durch Einsetzung aus

1) in 2):

$$\alpha + m\alpha + n\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha(1+m+n) = 180^\circ$$

$$\alpha = \frac{180}{1+m+n}$$

Und daraus werden nach 1):

$$\beta = \frac{m \cdot 180}{1+m+n}$$

$$\gamma = \frac{n \cdot 180}{1+m+n}$$

Auflösung. Der dritte Winkel γ ist, wie in der Aufgabe 48, gleich $180^\circ - (\alpha + \beta)$ zu setzen; also:

$$\begin{aligned} \gamma &= 180 - 2 \cdot \alpha \dots \dots \dots = 2(90 - \alpha) \\ &= 180 - 106^\circ 55' 26'' \dots \dots \dots = 2 \cdot 36^\circ 32' 17'' \\ &= 73^\circ 4' 34'' \end{aligned}$$

Auflösung. Da $\alpha = \beta$ zu setzen ist, so wird die Gleichung:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$

zu:

$$2\alpha = 180 - \gamma$$

Daraus wird:

$$\alpha = \frac{180 - \gamma}{2} \dots \dots \dots = 90 - \frac{\gamma}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 32^\circ 30' 22'' \dots \dots \dots = 90 - 73^\circ 44' 49''$$

$$= 16^\circ 15' 11''$$

Aufgabe 52. Ein rechtwinkliges Dreieck enthält einen Winkel $\alpha = 41^\circ 43' 45''$. Wie gross sind β , γ ?

Auflösung. Ist der rechte Winkel

$\gamma = 90^\circ$, so folgt für:

$$\beta = 180^\circ - (90^\circ + 41^\circ 43' 45'') = 90^\circ - 41^\circ 43' 45'' = 48^\circ 16' 15''$$

Aufgabe 53. Von den drei Winkeln eines Dreiecks sei α um $13^\circ 27'$ grösser als β und β um $25^\circ 54''$ kleiner als γ . Wie gross sind α , β , γ ?

Erkl. 179. Probe zu nebenstehender Auflösung:

$$\begin{array}{r} \alpha = 60^\circ 37' 42'' \\ \beta = 47^\circ 10' 42'' \\ \gamma = 72^\circ 11' 36'' \\ \hline \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \end{array}$$

Auflösung. Nach der Aufgabe ist:

$$1) \dots \alpha = \beta + 13^\circ 27'$$

$$2) \dots \beta = \gamma - 25^\circ 54''$$

Ferner:

$$3) \dots \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Also durch Einsetzung aus 2) in 1):

$$\alpha = \gamma - 25^\circ 54'' + 13^\circ 27' = \gamma - 11^\circ 33' 54''$$

und alsdann durch Einsetzung in 3):

$$(\gamma - 11^\circ 33' 54'') + (\gamma - 25^\circ 54'') + \gamma = 180^\circ$$

$$3\gamma = 180^\circ + 11^\circ 33' 54'' + 25^\circ 54''$$

$$= 216^\circ 34' 48''$$

$$\gamma = 72^\circ 11' 36''$$

Also durch Wiedereinsetzung in 2) und 1):

$$\beta = 72^\circ 11' 36'' - 25^\circ 54'' = 47^\circ 10' 42''$$

$$\alpha = 47^\circ 10' 42'' + 13^\circ 27' = 60^\circ 37' 42''$$

Aufgabe 54. Wie gross sind die Winkel eines Dreiecks, wenn:

$$1) \dots \alpha + \beta = \gamma$$

und

$$2) \dots \alpha - \beta = \frac{\gamma}{3}$$

sein soll?

Erkl. 180. Die Probe nebenstehender Auflösung liefert für die drei bekannten Gleichungen:

$$1) \dots \alpha + \beta = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ = \gamma$$

$$2) \dots \alpha - \beta = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \frac{\gamma}{3} = \frac{90}{3}$$

$$3) \dots \alpha + \beta + \gamma = 60 + 30 + 90 = 180$$

Auflösung. Zusammen mit dem Satze über die Winkelsumme hat man drei Gleichungen für die drei Unbekannten α , β , γ , nämlich als dritte Gleichung:

$$3) \dots \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Setzt man in dieser dritten Gleichung entweder für $(\alpha + \beta)$ den wegen Gleichung 1) gleich grossen Wert γ ein, oder aber für γ den Wert $(\alpha + \beta)$, so erhält man:

$$\alpha + \beta + \gamma$$

entweder:

$$= \gamma + \gamma = 2\gamma = 180$$

oder:

$$= (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) = 2 \cdot (\alpha + \beta) = 180$$

Und hieraus zusammen mit Gleichung 1) folgt zunächst:

$$\alpha + \beta = \gamma = 90^\circ$$

Also ist das Dreieck ein rechtwinkliges.

Durch Addition der Gleichungen 1) und 2) erhält man ferner:

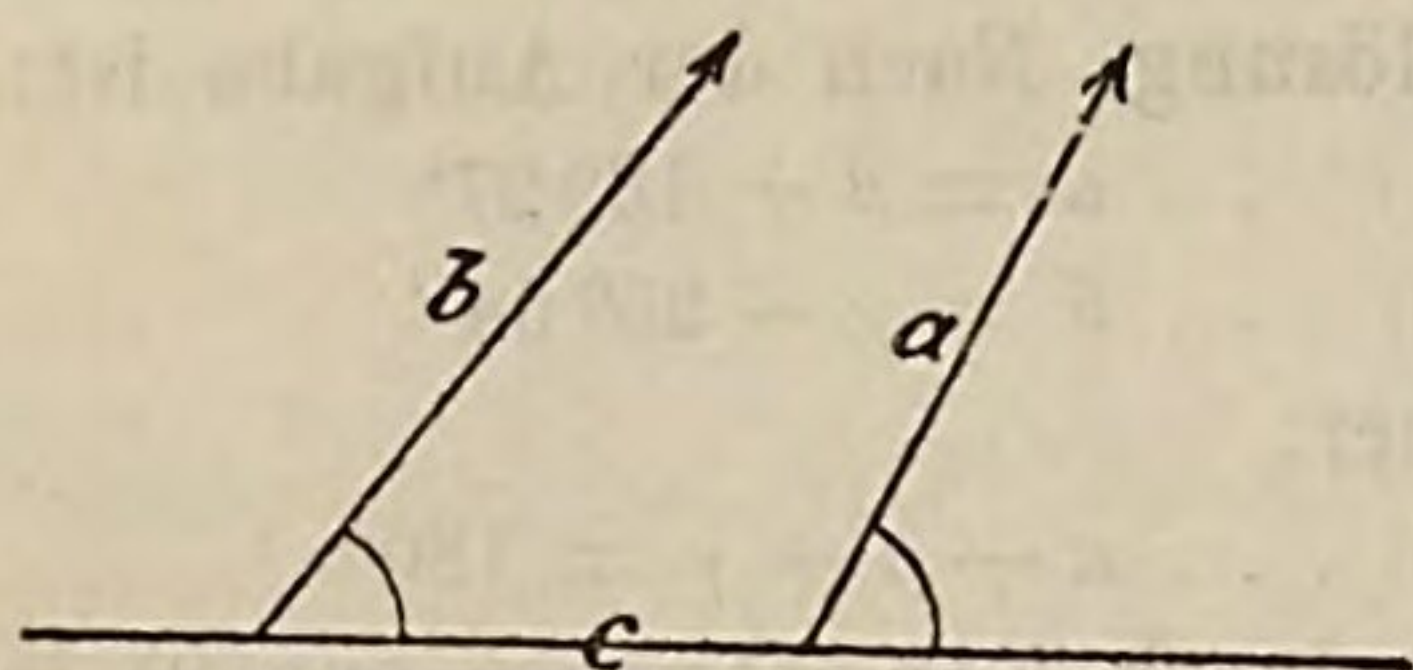
$$2\alpha = \gamma + \frac{\gamma}{3} = \frac{4}{3} \cdot \gamma = \frac{4}{3} \cdot 90^\circ = 120^\circ$$

Also ist:

$$\alpha = 60^\circ; \quad \gamma = 90^\circ; \quad \beta = 30^\circ$$

Aufgabe 55. Mit einer geradlinigen Richtung c (s. Figur 68) bildet eine erste Gerade a einen Winkel von $87^\circ 53' 42''$, eine zweite Gerade b einen Winkel von $55^\circ 4' 19''$; unter welchem Winkel schneiden sich die Geraden a und b ?

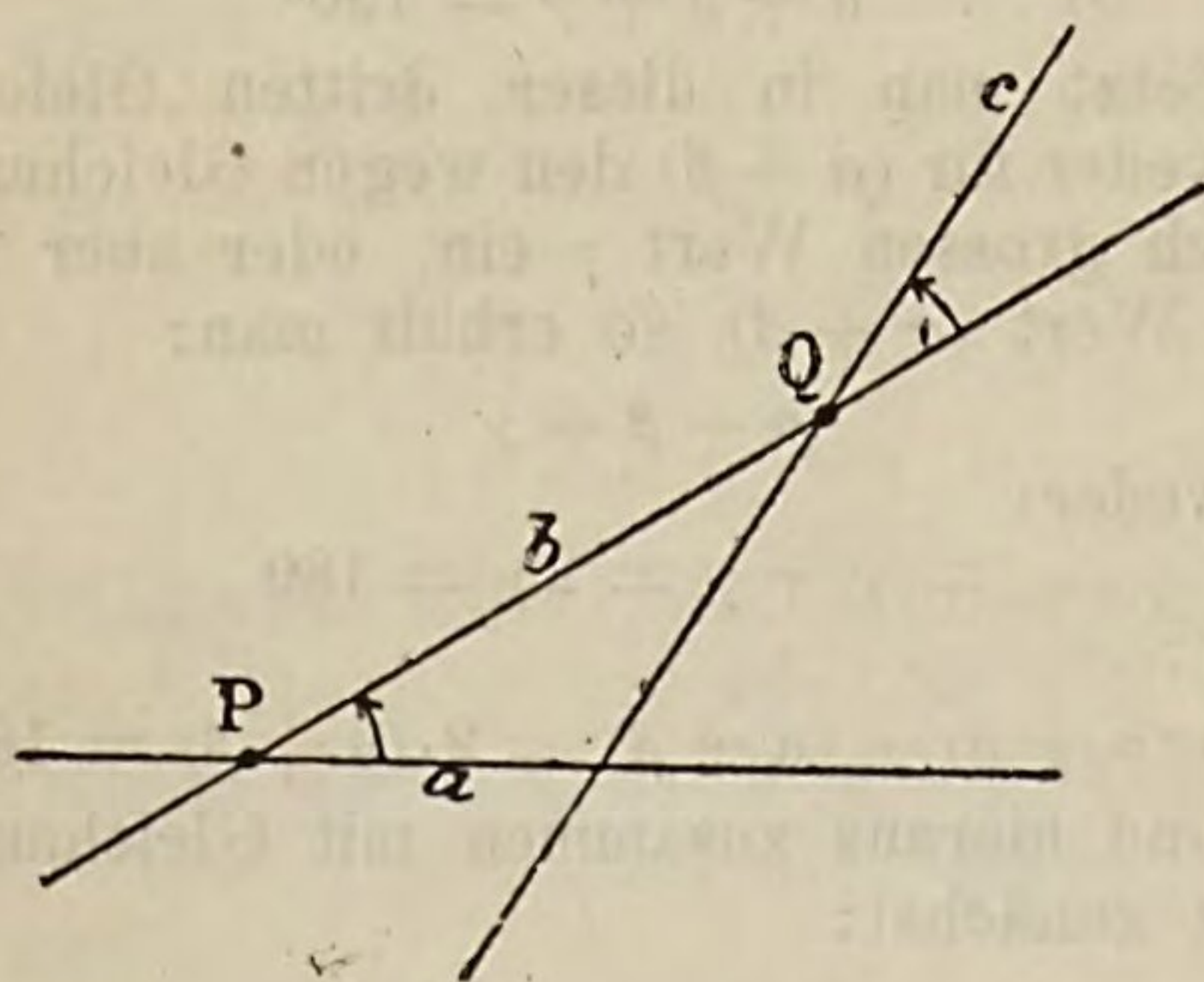
Figur 68.



Erkl. 181. Nach Absatz 4 der Antwort auf Frage 40 hätte man auch unvermittelt angeben können, dass $\sphericalangle(a, b)$ als dritter Innenwinkel gleich der Differenz des Aussenwinkels (a, c) und des andern Innenwinkels (b, c) sein muss.

Aufgabe 56. Eine Linie a in Figur 69 wird um einen auf ihr liegenden Punkt P gedreht um einen Winkel von $32^\circ 43' 27''$ in eine zweite Lage b ; und alsdann um einen in dieser zweiten Linie liegenden Punkt Q im gleichen Drehungssinne weiter gedreht um einen Winkel von $44^\circ 56' 14''$ in eine dritte Lage c . Welchen Winkel wird die dritte Lage c mit der ersten Lage a bilden?

Figur 69.



Erkl. 182. Statt nach Lehrsatz 18 hätte die nebenstehende Auflösung auch nach der im zweiten Absatz der Erkl. 85 durchgeführten Ueberlegung gefunden werden können. Demnach muss nämlich der Winkel der dritten Lage c mit der ersten a derselbe sein, als ob die Linie a nicht nach einander um beide Winkel gedreht worden wäre, sondern gleich auf einmal um die Summe beider Winkel.

Auflösung. Denkt man sich die Geraden a und b bis zu ihrem Schnittpunkt verlängert, so bilden a, b, c ein Dreieck, für welches der von c und a gebildete gegebene Winkel ein Aussenwinkel, der von b und c gebildete Winkel ein Innenwinkel und der von b und a in ihren Verlängerungen gebildete Winkel dritter Innenwinkel ist. Nach Lehrsatz 18 ist daher:

$$\sphericalangle(c, a) = (b, c) + \sphericalangle(b, a)$$

Darum erhält man für den gesuchten:

$$\begin{aligned} \sphericalangle(a, b) &= \sphericalangle(a, c) - (b, c) \\ &= 87^\circ 53' 42'' - 55^\circ 4' 19'' \\ &= 32^\circ 49' 23''. \end{aligned}$$

Auflösung. Am Schnittpunkt der dritten Lage c mit der ersten Lage a entsteht ein Winkel, welcher für das von a, b, c gebildete Dreieck Aussenwinkel ist. In demselben Dreieck ist der erste Drehungswinkel ein Innenwinkel, der zweite Drehungswinkel Scheitelwinkel des andern Innenwinkels, also jenem zweiten Innenwinkel gleich. Nach Lehrsatz 18 muss also der gesuchte Winkel als Aussenwinkel gleich der Summe der beiden bekannten Winkel sein, nämlich:

$$\begin{aligned} &= 32^\circ 43' 27'' + 44^\circ 56' 14'' \\ &= 77^\circ 39' 41'' \end{aligned}$$

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 57. Ein Winkel von $53^{\circ}36'$ soll in Minuten ausgedrückt werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 4.

Aufgabe 58. Ein Winkel von $72^{\circ}59''$ soll in Sekunden ausgedrückt werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 1.

Aufgabe 59. Einen Winkel von $141^{\circ}13''$ in Sekunden auszurechnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 1.

Aufgabe 60. Ein Winkel von $17^{\circ}29'42''$ soll ausgedrückt werden:

- a) in Ganzen und Bruchteilen des Grades
- b) in Ganzen und Bruchteilen der Minute.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog für:

- a) der Auflösung der Aufgabe 11 und 19; für
- b) der Auflösung der Aufgabe 15.

Aufgabe 61. Einen Winkel von $72,0875^{\circ}$ in Grade, Minuten und Sekunden umzusetzen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 18.

Aufgabe 62. Es sollen einige aliquoten Teile des rechten Winkels angegeben werden, welche sich in ganzen Zahlen von Graden, Minuten und Sekunden ausdrücken lassen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 9.

Aufgabe 63. Einen Winkel von $28^{\circ}39'52''$ noch um sein $2\frac{1}{2}$ -faches zu vergrössern.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 23 und 24.

Aufgabe 64. Das 15-fache eines Winkels sei $93^{\circ}47'21''$. Wie gross ist der einfache Winkel?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 25, 26 und 27.

Aufgabe 65. Es sollen berechnet werden der 7te, 11te und 13te Teil des Vollwinkels.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 28.

Aufgabe 66. Berechne Aussenwinkel und Innenwinkel des gleichwinkligen 15-Ecks, 18-Ecks, 20-Ecks 24-Ecks u. s. w.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 29 und 43.

Aufgabe 67. Von vier um einen Punkt herum liegenden Winkeln ist jeder folgende doppelt so gross, als der vorhergehende. Wie gross ist jeder?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 30.

Aufgabe 68. Es soll die Summe von vier Winkeln bestimmt werden, welche sind:

$$\alpha = 35,783^{\circ}$$

$$\gamma = 17043' 27''$$

$$\beta = 77683''$$

$$\delta = 9822,25'$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 31.

Aufgabe 69. Es soll die Differenz bestimmt werden zwischen einem Winkel

$$\alpha = 37^{\circ} 38' 39''$$

und einem Winkel:

$$\beta = 5732,75'$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 32 und 33.

Aufgabe 70. Der wie vierte Teil eines Winkels von $297^{\circ} 29' 26''$ beträgt $17^{\circ} 29' 58''$?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 34.

Aufgabe 71. Welche Winkel bilden die Zeiger einer Uhr um $5\frac{1}{4}$ Uhr, um 7 Uhr und 35 Minuten, um $6\frac{1}{2}$ Uhr?

In welcher Zeit beschreibt der Minutenzeiger einen Winkel von 45° , von 15° , von $30\frac{1}{2}^{\circ}$?

In welcher Zeit beschreibt der Stundenzeiger einen Winkel von 10° , von 25° ?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 35 bis 38.

Aufgabe 72. Man bestimme Supplementwinkel und Komplementwinkel der Winkel:

$$\alpha = 43^{\circ} 28' 57''$$

und:

$$\beta = 87^{\circ} 53' 2''$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 39 und 39a.

Aufgabe 73. Welche Gruppen von Winkeln (einspringende, stumpfe, rechte und spitze) können bei einem Fünfeck auftreten?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 42 und stützt sich auf die Antwort auf Frage 43.

Aufgabe 74. Auf wie vielfache Weise kann man 6 oder 7 gegebene Punkte zu einem 6-Eck oder 7-Eck verbinden?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 44.

Aufgabe 75. Wie viele Diagonalen und wie viele Seitenschnittpunkte hat ein 7-Eck oder 8-Eck?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 46 und 47.

Aufgabe 76. Ein Dreieck habe folgende Winkelbeziehungen:

1) $\sphericalangle \alpha = 123^\circ 47' 36''$; $\sphericalangle \beta = 12^\circ 13' 14''$

2) $\sphericalangle \alpha = 75^\circ 27''$ und $\sphericalangle \beta = 2 \cdot \sphericalangle \gamma$

3) $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta = 53^\circ 19''$

4) $\sphericalangle \alpha = 74^\circ 23' 59''$ und zwei gleiche Winkel...

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 48 bis 54.

Wie gross sind die drei Winkel dieser Dreiecke?

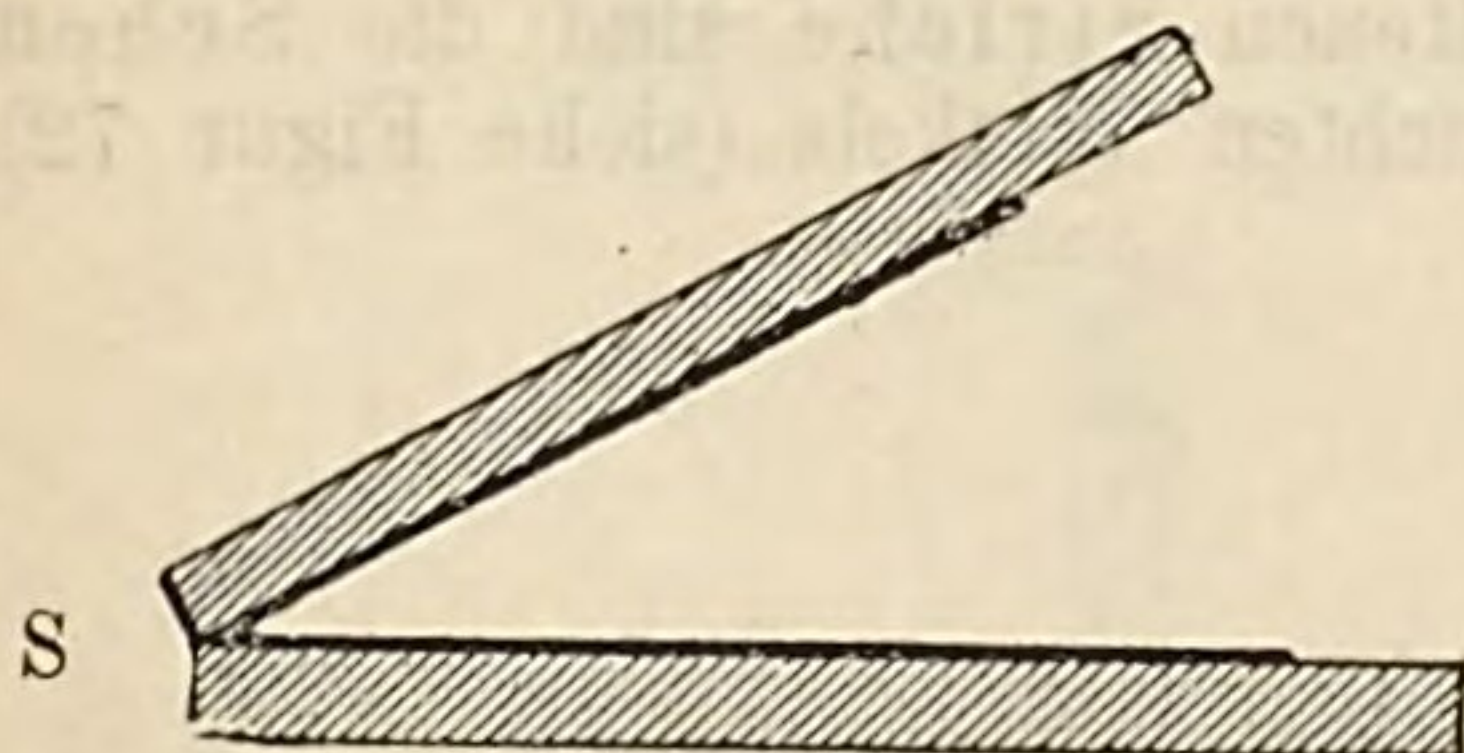
Aufgabe 77. Wie gross ist der Aussenwinkel bei γ in einem Dreieck, dessen Winkel $\gamma + \beta = 108^\circ 23' 48''$ sind, während β das doppelte von γ ist?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 54 bis 56.

B. Konstruktionsaufgaben.

Aufgabe 78. Man soll einen beliebigen Winkel konstruieren.

Figur 70.

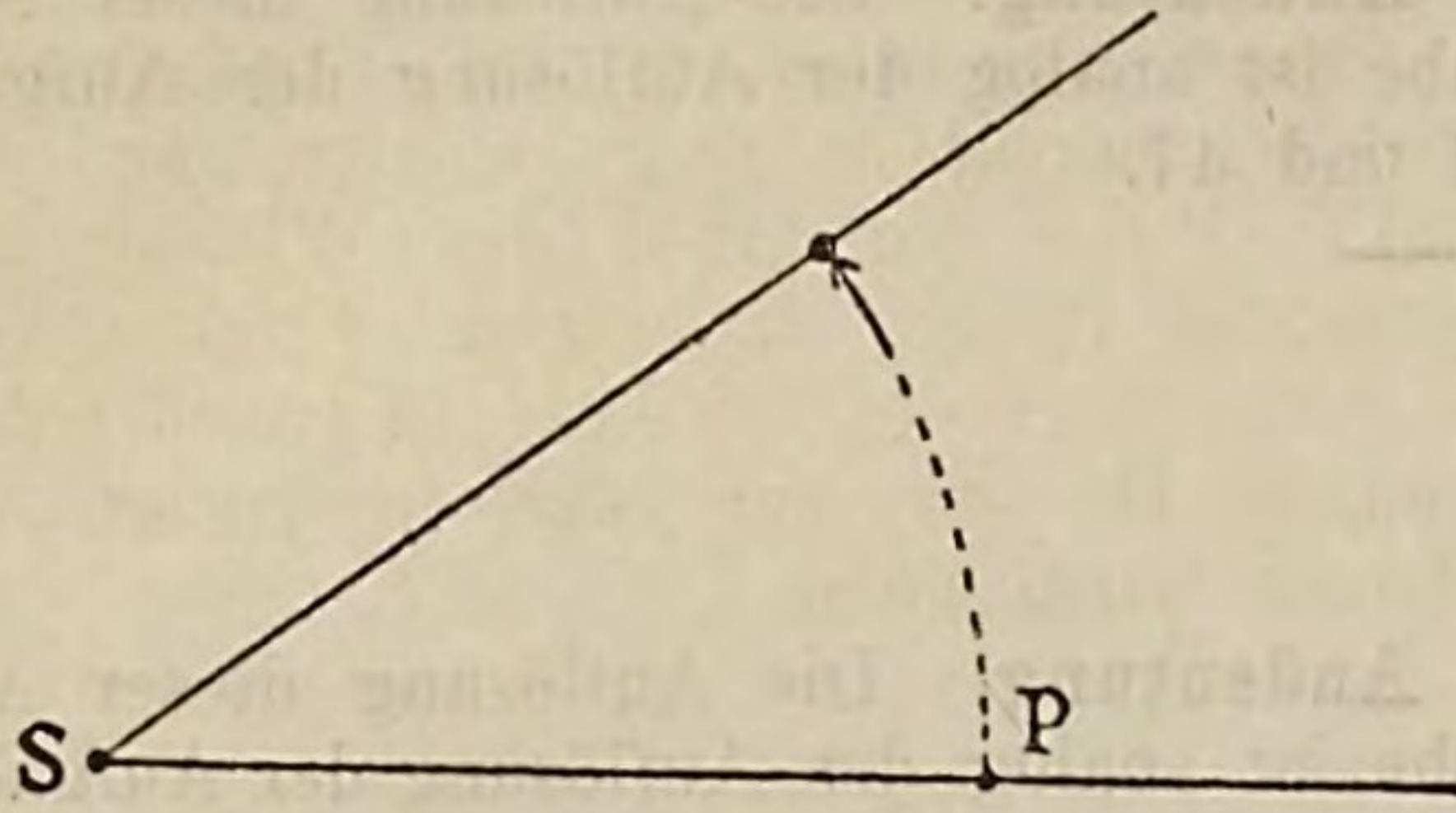


Auflösung. Man wähle auf der Zeichnungsebene einen beliebigen Punkt S als Scheitel des Winkels; lege alsdann ein Lineal so auf das Zeichenpapier, dass man beim Ziehen eines feinen Striches längs einer bestimmten Stelle des Lineals genau in dem gewählten Punkte S beginnen kann; dieser Strich stellt den einen Schenkel des Winkels dar. Alsdann lege man das Lineal in einer beliebigen andern Lage wieder so auf das Zeichenpapier, dass man beim Ziehen eines zweiten Striches wieder genau in dem gewählten Punkte S anfangen kann. Der zwischen diesen beiden Strichen liegende Teil der Ebene stellt einen Winkel, bzw. einen Teil eines Winkels symbolisch dar (siehe Erkl. 4).

Aufgabe 79. Man soll den Weg oder die Bahn eines Punktes auf dem Anfangsschenkel eines Winkels angeben, wenn dieser Anfangsschenkel durch Drehung um den Scheitel den Winkel erzeugt.

Auflösung. Nach den Antworten auf die Fragen 3 und 4 beschreibt ein Punkt P auf dem Anfangsschenkel eines Winkels bei der Erzeugung dieses Winkels eine Reihe von Linienelementen, welche in ihrer

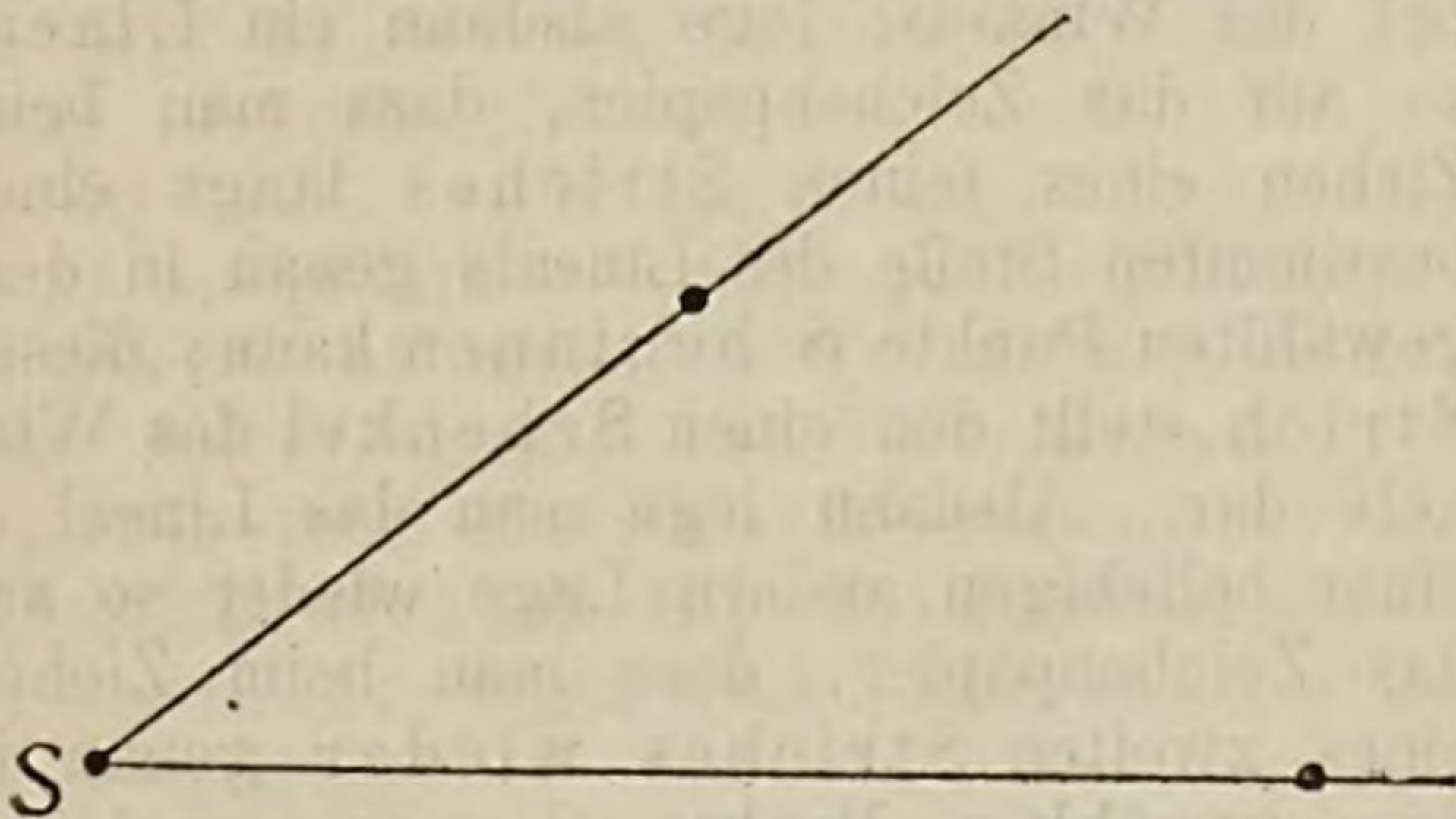
Figur 71.



Erkl. 183. Die Böghen in der Winkelöffnung, welche laut Antwort 6 und Erkl. 51 zur näheren Bezeichnung des Winkels dienen, sind ursprünglich nichts anderes, als der Weg, welchen ein Punkt des Anfangsschenkels beschreibt, um bei der Erzeugung des Winkels auf den Endschenkel übergeführt zu werden. Darum sind jene Böghen auch meistens Kreisböghen mit Ausnahme solcher Fälle, wo durch Belassung der Kreisform Undeutlichkeit entstehen würde (siehe Figur 23).

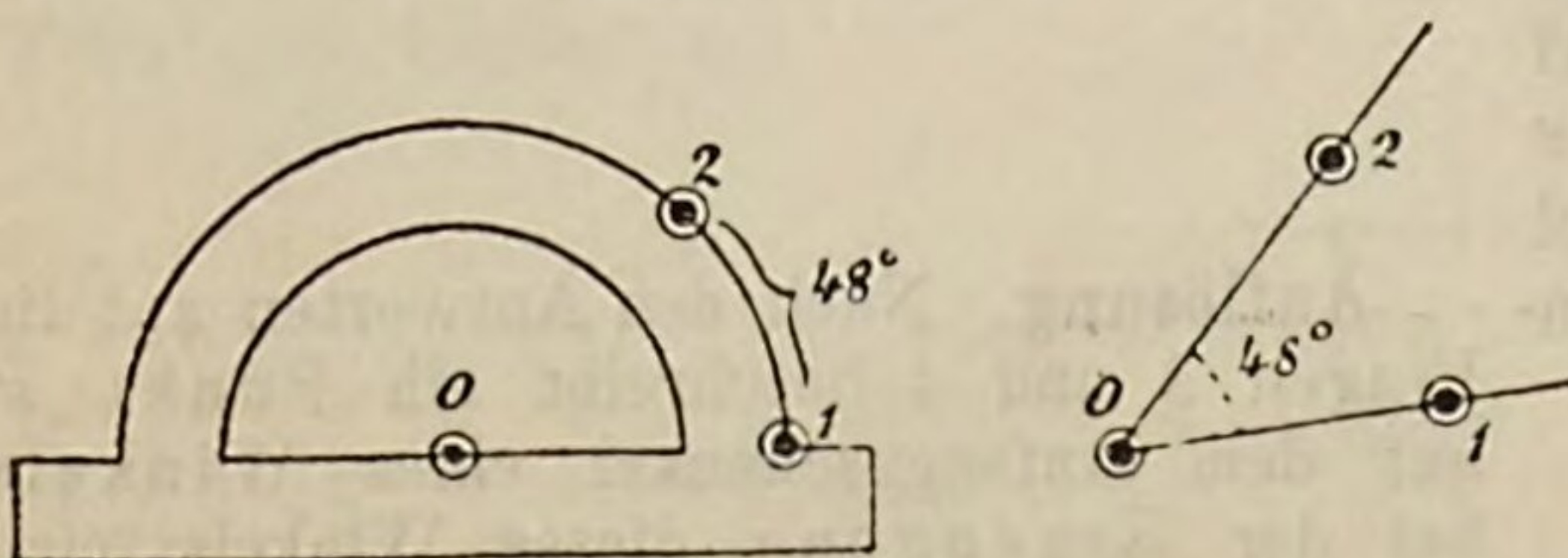
Aufgabe 80. Man soll einen Winkel zeichnen, von welchem der Scheitel gegeben ist, und ausserdem zwei Punkte, durch deren einen der Anfangsschenkel und durch deren zweiten der Endschenkel des Winkels gehen soll.

Figur 72.



Aufgabe 81. Man soll mit Hilfe des Winkelmessers einen Winkel von 48° konstruieren.

Figur 73.



Gesamtheit einen Teil einer Kreislinie oder einen Kreisbogen erfüllen, nämlich denjenigen Teil einer Kreislinie, welcher zwischen dem Anfangs- und Endschenkel des Winkels gelegen ist.

Ist daher (siehe Fig. 71) S der Scheitel, P der fragliche Punkt, so nehme man die Strecke SP in den Zirkel, d. h. man setze mit der einen Zirkelspitze im Punkte S , mit der andern im Punkte P ein, und führe dann mit gleichbleibender Zirkelöffnung und unter Festhaltung der im Punkte P eingesetzten Zirkelspitze — die andere Zirkelspitze von P aus stetig so über das Zeichenpapier, bis dieselbe einen Punkt des Endschenkels des Winkels erreicht. Derjenige Punkt des Endschenkels, in welchem die Zirkelspitze ankommt, ist die Stelle, welche der Punkt P nach Erzeugung des Winkels einnimmt.

Auflösung. Man lege das Lineal zweimal nacheinander so auf die Zeichnungsebene, dass man beim Ziehen eines Strichs beide Male im Punkte S beginnen kann und genau das eine Mal durch den einen, das andere Mal durch den andern Punkt kommt. Die so erhaltenen Striche sind die Schenkel des gesuchten Winkels (siehe Figur 72).

Auflösung. Man lege den Winkelmesser in beliebiger Lage auf die Zeichnungsebene und bezeichne durch einen Punkt auf dem Papier:

- 1) den Mittelpunkt O des Winkelmessers;
- 2) den Punkt, wo der **Anfangsschenkel** aller Winkel des Winkelmessers über den Umfangsrand heraustritt (0°);
- 3) den Punkt, wo der Schenkel des auf dem Winkelmesser angegebenen

Winkels von 48° über den Rand des Winkelmessers hervorkommt.

Nimmt man alsdann den Winkelmesser vom Zeichenpapier weg, so ist der erste Punkt O der Scheitel des Winkels und die beiden Punkte diejenigen, durch welche die Schenkel des Winkels zu gehen haben. Demnach ist jetzt nur noch die vorige Aufgabe zu wiederholen.

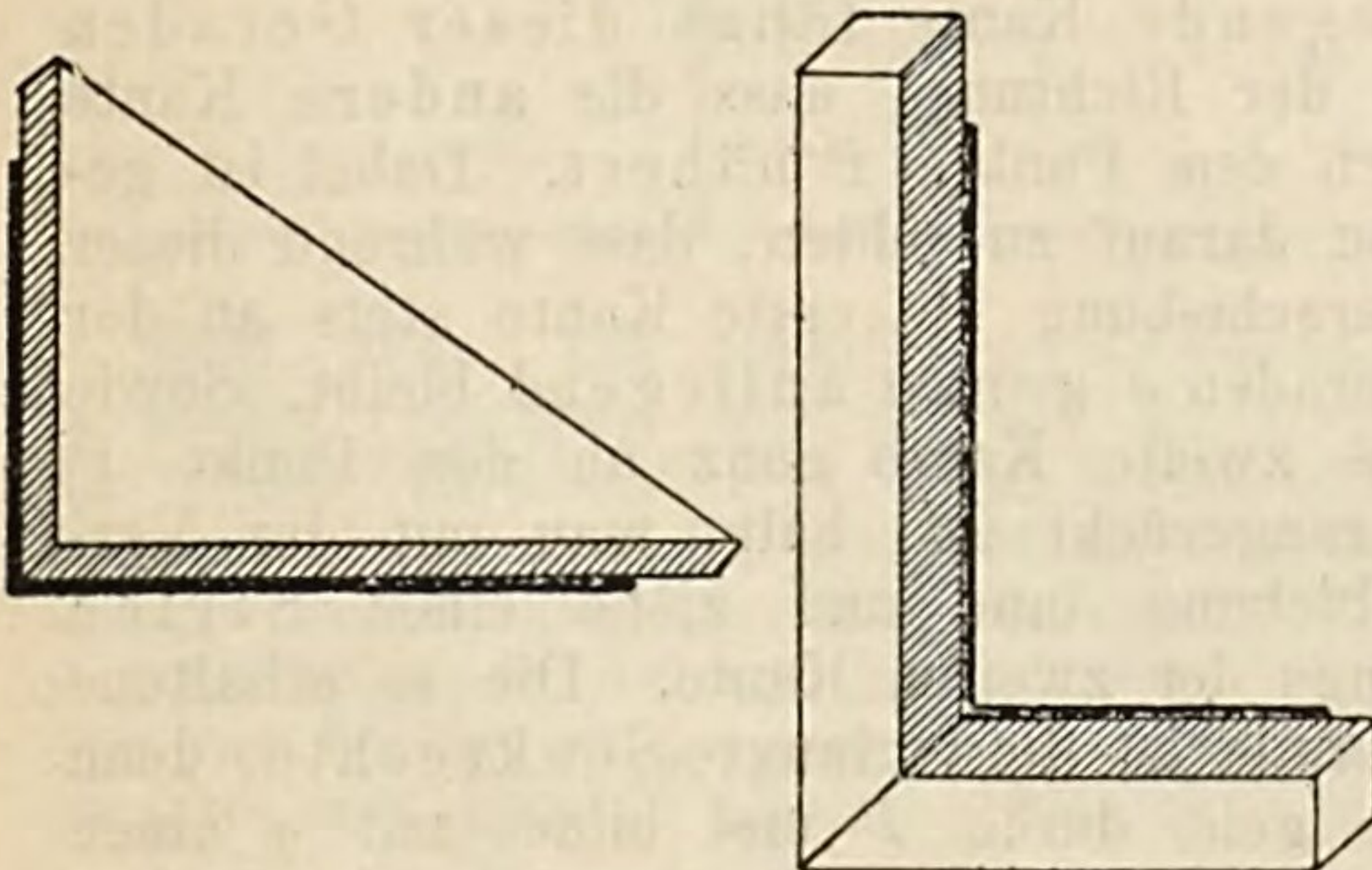
Aufgabe 82. Man soll die Grösse verschiedener Winkel, welche beliebig gezeichnet wurden, erst nach dem Augennmass zu schätzen versuchen und dann mit dem Winkelmesser abmessen.

Auflösung. Die Schätzung von Winkeln wird darnach vorzunehmen sein, dass man abschätzt, ob der vorliegende Winkel wohl eine Hälfte, oder ein Drittel, oder drei Viertel u. s. w. des rechten Winkels betragen dürfte, und dann von der Zahl 90° den entsprechenden Bruchteil berechnet.

Die Messung eines Winkels mit dem Winkelmesser ist schon in Antwort 13 und den Erklärungen 31 bis 37 angegeben. Siehe hierzu besonders Figur 8 bis 12.

Aufgabe 83. Man soll mit einem der in Figur 17 bis 22 dargestellten „Winkelscheite“ einen rechten Winkel zeichnen.

Figur 74.

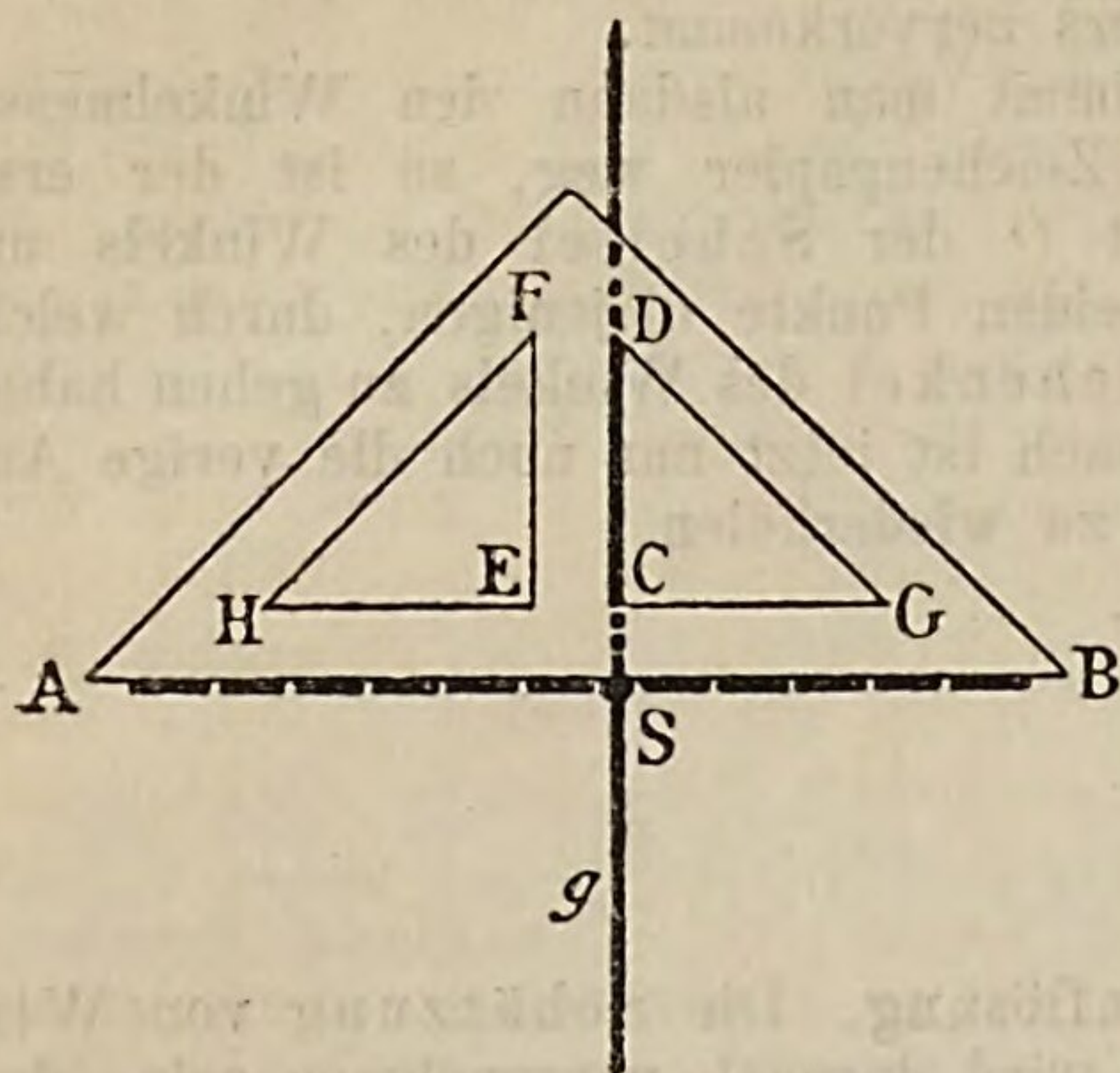


Auflösung. Man lege das Winkelscheit so auf die Ebene des Zeichenpapiers, dass die beiden Schenkel des rechten Winkels am Winkelscheit je als Kanten eines Lineals dienen, und führe längs dieser beiden Kanten vom Scheitel anfangend einen feinen Strich. Die beiden so erhaltenen Strahlen bilden einen rechten Winkel, weil die von ihnen gebildete Figur kongruent gemacht ist der Figur des rechten Winkels am Winkelscheit (siehe Figur 74).

Aufgabe 84. Man soll mit dem in Figur 22 und 75 dargestellten Winkelscheit zwei zu einander senkrechte Gerade zeichnen.

Auflösung. Soll nicht nur, wie in der vorigen Aufgabe, ein rechter Winkel, sondern gleichzeitig auch die Nebenwinkel und Scheitelwinkel dieses rechten Winkels gezeichnet werden, so dürfen nicht nur die Schenkel des rechten Winkels, sondern

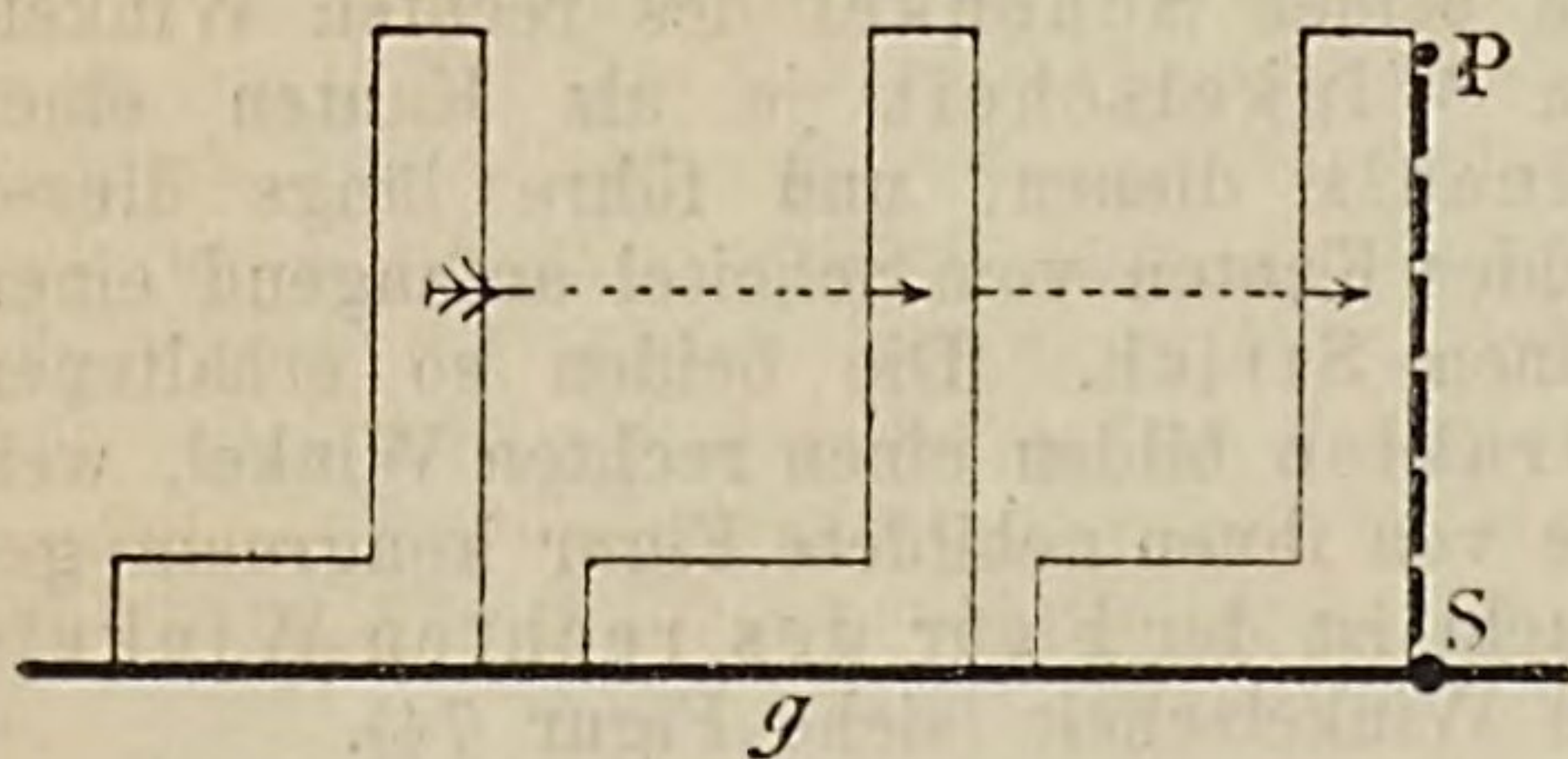
Figur 75.



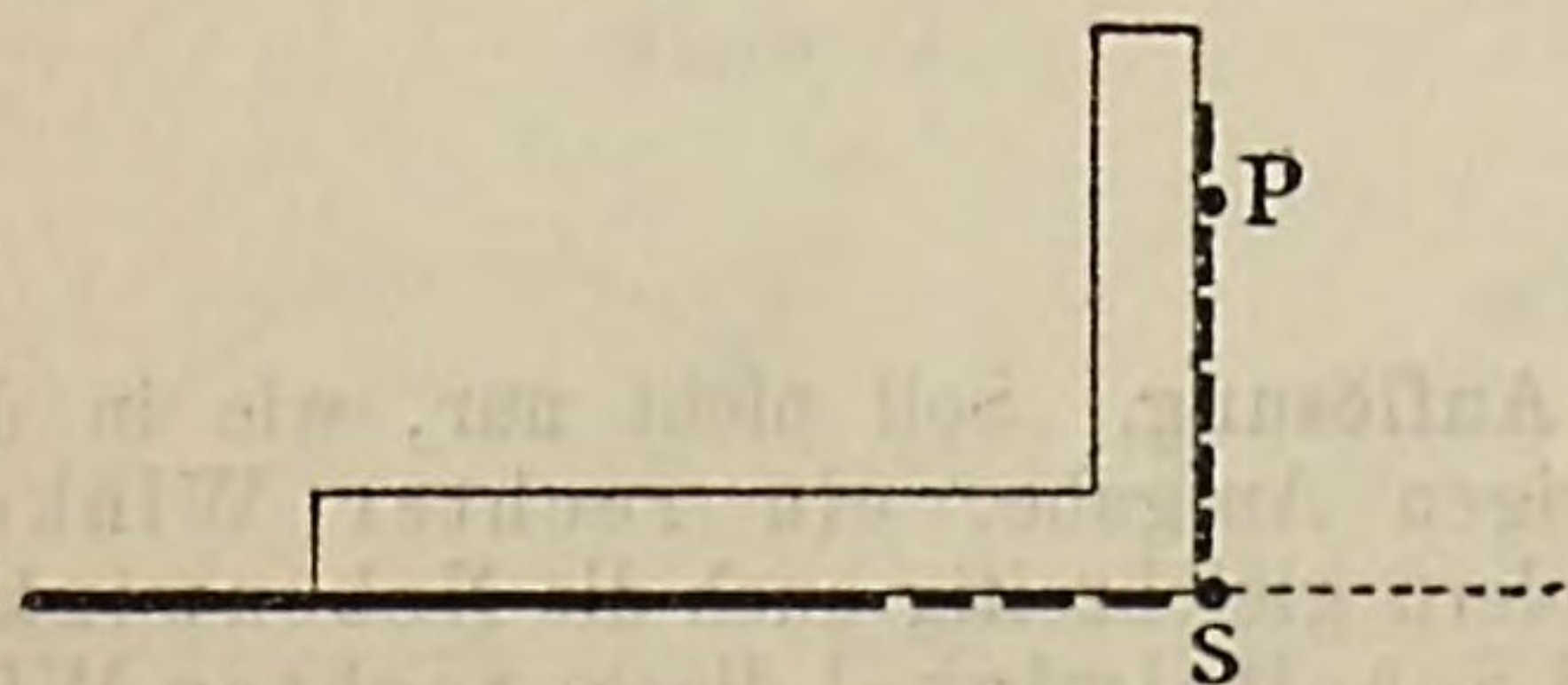
Erkl. 184. Die Auflösungen der Aufgaben 83 und 84 bilden gleichzeitig die Lösung der Aufgabe, „in einem gegebenen Punkte S einer gegebenen Geraden g einen rechten Winkel anzutragen, oder eine Senkrechte zu errichten.“

Aufgabe 85. Durch einen gegebenen Punkt P ausserhalb einer gegebenen Geraden g (siehe Figur 76) soll mittels des Winkelscheits eine Senkrechte auf diese Gerade gefällt werden.

Figur 76.



Figur 77.



auch deren Verlängerungen gleichzeitig gezeichnet werden. Das lässt sich mit dem in Figur 22 und 75 dargestellten Winkelscheit folgendermassen erreichen:

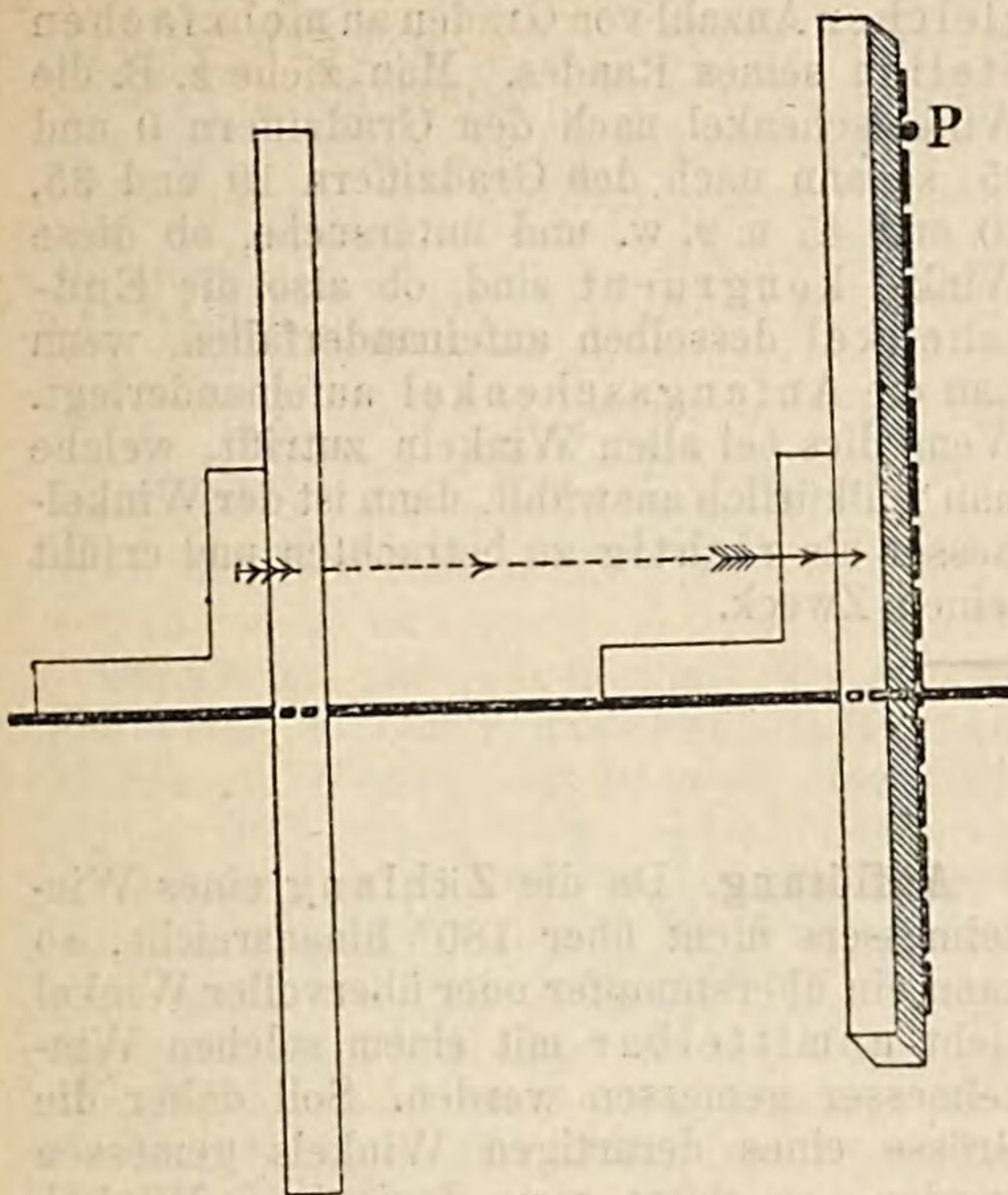
Man zeichne zunächst eine beliebige Gerade (g in Figur 75), wähle auf derselben den Punkt S als Schnittpunkt der beiden verlangten Geraden und lege alsdann das Winkelscheit so auf die Zeichnungsebene, dass eine der beiden kurzen Innenkanten CD oder EF an der gezeichneten Geraden anliegt. Nun verschiebe man diese Innenkante CD längs der gezeichneten Geraden g so weit, bis die längste Aussenkante AB durch den Punkt S geht, und führe bei dieser Lage des Winkelscheits einen Strich längs dieser Kante. Die beiden so erhaltenen Geraden bilden nach Antwort 26 vier rechte Winkel, weil der eine von ihnen, nämlich $\angle DSB$, ein solcher ist. Dass eben dieser $\angle DSB$ ein rechter Winkel ist, folgt nach Lehrsatz 23 daraus, dass DCG ein rechter ist und $CG \parallel SB$.

Auflösung. Man lege das Winkelscheit mit einer seiner Schenkelkanten an die gegebene Gerade an und zwar so, dass die andere Schenkelkante in dieselbe Halbebene zu liegen kommt, in welcher auch der gegebene Punkt P liegt. Alsdann verschiebe man die an der gegebenen Geraden anliegende Kante längs dieser Geraden in der Richtung, dass die andere Kante sich dem Punkte P nähert. Dabei ist genau darauf zu achten, dass während dieser Verschiebung die erste Kante stets an der Geraden g genau anliegend bleibt. Sowie die zweite Kante ganz an den Punkt P herangerückt ist, halte man mit der Verschiebung inne und ziehe einen Strich längs der zweiten Kante. Die so erhaltene Gerade ist die verlangte Senkrechte, denn sie geht durch P und bildet mit g einen rechten Winkel. Der Schnittpunkt S mit g ist der „Fusspunkt“ derselben (s. Fig. 76).

Bei dieser Aufgabe können zweierlei Erschwerungen eintreten, welche besondere Behandlung nötig machen:

1) Von der Geraden g könnte nur ein so kurzes Stück gezeichnet vorliegen, dass der Fusspunkt S nicht mehr auf die gezeichnet vorliegende Strecke der Geraden g , sondern auf deren Verlängerung zu liegen kommt (siehe Figur 77). Alsdann

Figur 78.

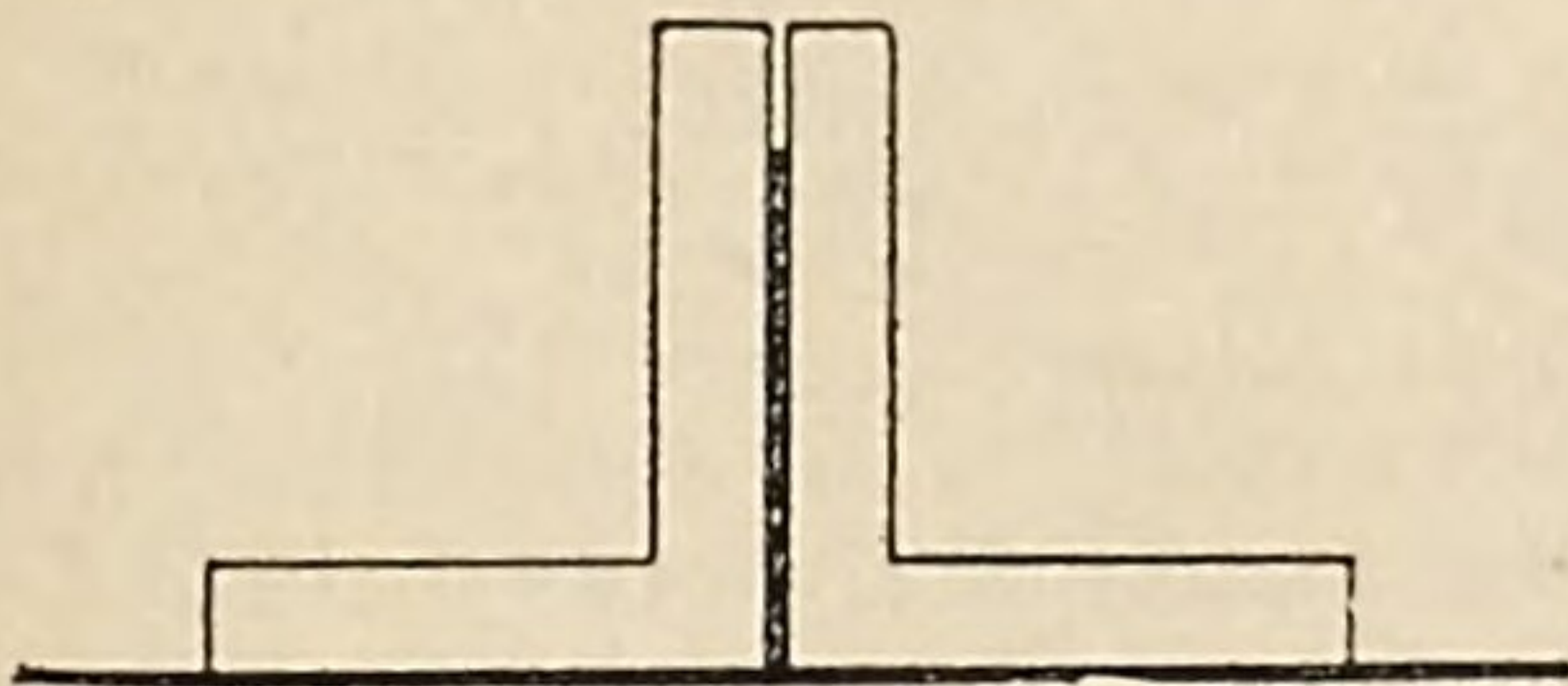


muss entweder diese Verlängerung erst gezeichnet werden, oder wenn das fehlende Stück der Verlängerung nicht sehr lang ist, so kann die Länge der Schenkelkante des Winkelscheits allein schon hinreichen, um die Ergänzung des fehlenden Stückes zu liefern (siehe Figur 77).

2) Die Entfernung des Punktes P von der Geraden g könnte so gross sein, dass auch die längere Kante des Winkelscheits nicht hinreicht, eine Senkrechte vom Punkte P bis zur Geraden g längs einer Kante zu ziehen. In diesem Falle lege man an die auf der Geraden g senkrecht angelegte Kante des Winkelscheits noch ein Lineal an und verschiebe dieses Lineal gleichzeitig mit dem Winkelscheit längs der Geraden g . Dabei muss darauf geachtet werden, dass sowohl die an g selbst anliegende Kante des Winkelscheits, als das an der andern Kante des Winkelscheits angelegte Lineal während der ganzen Verschiebung stets genau passend anliegend erhalten wird (siehe Figur 78).

Aufgabe 86. Man soll ein Winkelscheit prüfen, untersuchen, ob dasselbe zum Zeichnen von rechten Winkeln geeignet ist.

Figur 79.



Erkl. 185. Die Richtigkeit des nebenstehenden Verfahrens folgt aus der Erklärung des rechten Winkels als Hälfte des gestreckten. Ergeben also zwei gleich grosse Winkel zusammen genommen einen gestreckten Winkel von 180° , so ist jeder einzelne richtig gleich 90° . Wenn sich die beiden Striche nicht decken würden, sondern etwa einen Winkel φ miteinander bildeten, so wäre $\frac{\varphi}{2}$ der Fehler des Winkelscheits. Denn die zweifache Abtragung des Winkels bringt den Fehler auch zweifach mit sich, so dass der entstehende Winkel φ den doppelten Fehler darstellt, also $\frac{\varphi}{2}$ den einfachen.

Aufgabe 86 a. Man soll einen Winkelmesser prüfen, d. h. auf seine Richtigkeit untersuchen.

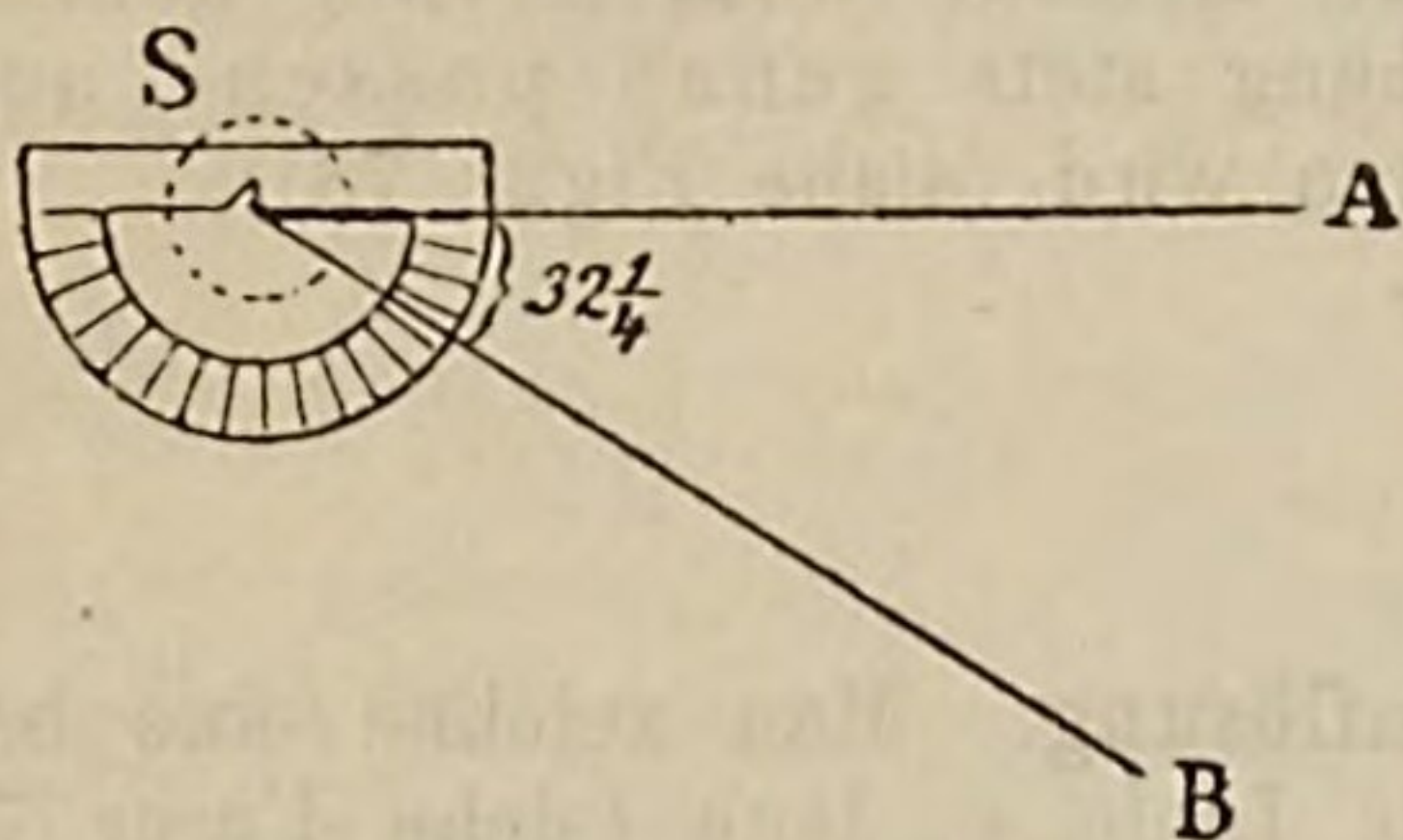
Auflösung. Man zeichne eine beliebige gerade Linie g , lege (siehe Figur 79) das zu prüfende Winkelscheit auf das Zeichenpapier fest auf und zeichne mittels desselben an der Geraden g einen rechten Winkel; alsdann drehe man das Winkelscheit um und errichte auf dem soeben erhaltenen Schenkel des gezeichneten rechten Winkels nach der andern Seite nochmals einen rechten Winkel. Deckt sich der so entstehende Strich mit der Verlängerung der ursprünglichen Geraden g , so ist das Winkelscheit richtig und es erfüllt seinen Zweck.

Auflösung. Um einen Winkelmesser auf seine Richtigkeit zu prüfen, konstruiere

man mittels desselben einen Winkel von gleicher Anzahl von Graden an mehrfachen Stellen seines Randes. Man ziehe z. B. die Winkelschenkel nach den Gradziffern 0 und 25, sodann nach den Gradziffern 10 und 35, 20 und 45 u. s. w. und untersuche, ob diese Winkel kongruent sind, ob also die Endschenkel desselben aufeinanderfallen, wenn man die Anfangsschenkel aufeinanderlegt. Wenn dies bei allen Winkeln zutrifft, welche man willkürlich auswählt, dann ist der Winkelmesser als richtig zu betrachten und erfüllt seinen Zweck.

Aufgabe 87. Man soll mittels des Winkelmessers die Grösse eines gegebenen überstumpfen oder eines übervollen Winkels bestimmen.

Figur 80.



Erkl. 186. In Figur 80 findet man nach nebenstehendem die Grösse des überstumpfen Winkels ASB durch Messung des spitzen Winkels ASB von $32\frac{1}{4}^\circ$ durch die Subtraktion:

$$360^\circ - 32\frac{1}{4}^\circ = 327\frac{3}{4}^\circ$$

Aufgabe 88. Ein gegebener Winkel soll mittels des Winkelmessers halbiert werden (allgem.: in n gleiche Teile geteilt werden).

Erkl. 187. Bei dieser Aufgabe besonders macht sich die unzureichende Genauigkeit eines gewöhnlichen Winkelmessers fühlbar, indem mittels desselben nur Bruchteile des Grades, nicht aber auch Minuten und gar Sekunden angegeben werden können.

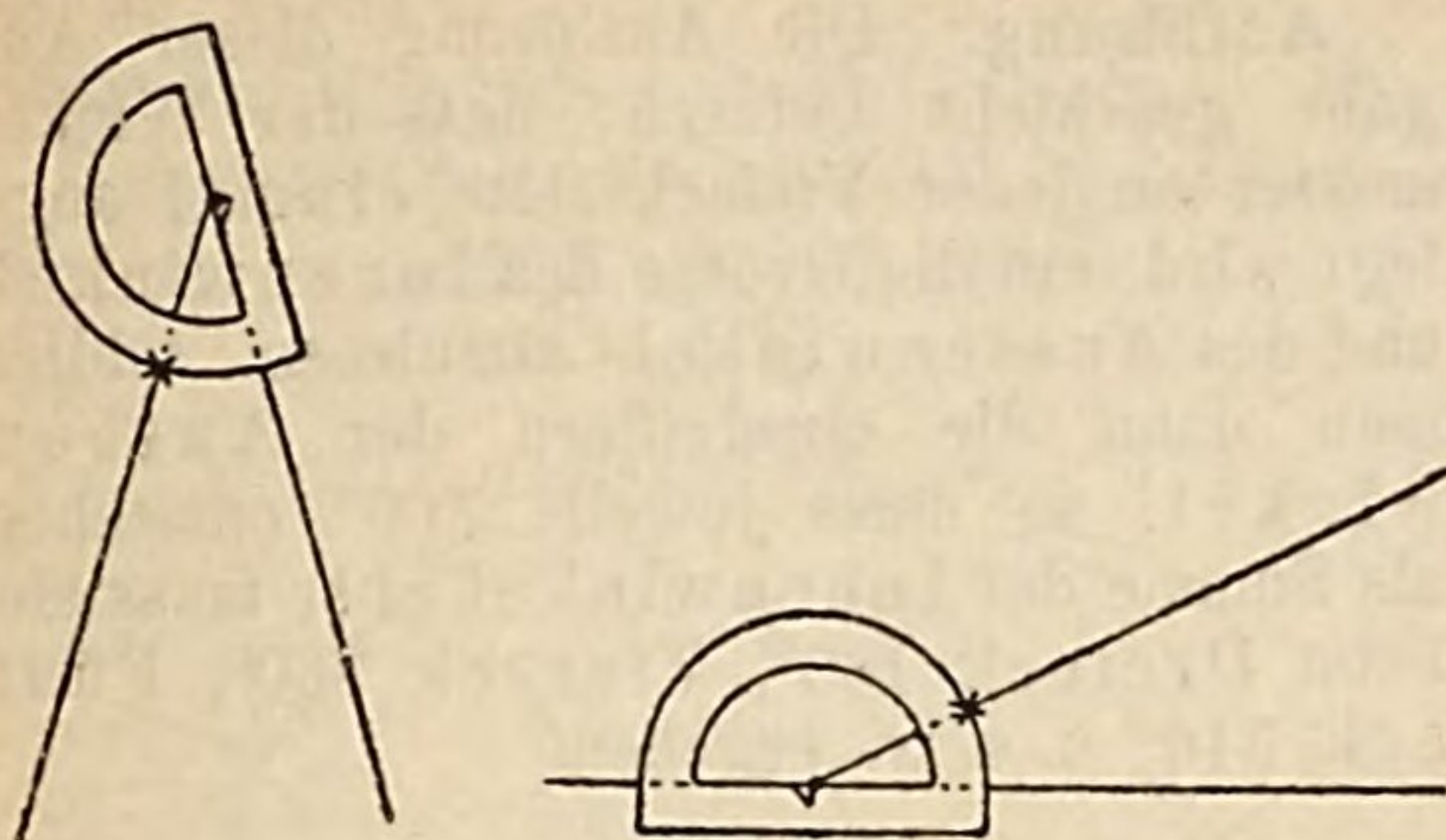
Aufgabe 89. Ein gegebener Winkel α soll an einer andern Stelle an einer gegebenen Geraden g angetragen werden.

Auflösung. Da die Zählung eines Winkelmessers nicht über 180° hinausreicht, so kann ein überstumpfer oder übervoller Winkel nicht unmittelbar mit einem solchen Winkelmesser gemessen werden. Soll daher die Grösse eines derartigen Winkels gemessen werden, so misst man denjenigen Winkel, um welchen sich der gegebene Winkel von 360° oder 180° unterscheidet. Dieser muss unterhalb 180° liegen, kann also gemessen werden und liefert alsdann, von 360° abgezogen bzw. zu 180° zugezählt die gesuchte Grösse des ursprünglichen Winkels.

Auflösung. Man lege den Winkelmesser so an den gegebenen Winkel an, dass die Anzahl seiner Grade abgelesen werden kann. Die so erhaltene Zahl dividiere man durch 2 (allgemein: durch n) und zeichne alsdann einen Winkel, welcher so viel Grade hat als die Hälfte (der n te Teil) jener Zahl angiebt.

Auflösung. Man lege den Winkelmesser erst (s. Figur 81) an den gegebenen Winkel an und messe denselben oder bezeichne auf dem Rande des Winkelmessers die Stelle,

Figur 81.



wo der zweite Schenkel durchgeht. Alsdann lege man den Winkelmesser an der gegebenen Geraden im gegebenen Punkte an und bezeichne auf der Zeichnungsebene die Lage des Punktes, der soeben auf dem Rande des Winkelmessers angemerkt wurde. Alsdann nehme man den Winkelmesser von der Zeichnungsebene ab und ziehe eine Gerade durch den gegebenen Scheitel des Winkels nach dem angemerkten Punkte (s. Figur 81).

Erkl. 188. Da es bei dieser Aufgabe 89 nicht nötig ist, die Gradzahl des Winkels wirklich zu erfahren, so ist auch deren Ablesung nicht erforderlich. Daher kann die Aufgabe auch gelöst werden mit einem nicht mit Winkelteilung versehenen Stück Papier von der Form eines Winkelmessers, sogar mit einem beliebig anders geformten Stück Papier oder sonstigen Stoffes, auf welchem Scheitel und Anfangsschenkel des gegebenen Winkels angemerkt werden kann und derjenige Punkt zu bezeichnen ist, wo der Endschenkel des Winkels unter dem Gegenstand hervor- kommt. Aus diesem Grunde kann z. B. das in Figur 22 gezeichnete Winkelscheit auch als Winkelmesser eingerichtet werden durch Aufzeichnung der Stellen, wo die Schenkel bestimmter Winkel die andere Kante des Winkelscheites durchschneiden.

Aufgabe 90. Man zeichne vier vom gleichen Punkte ausgehende Strahlen und schätze die Grösse ihrer Winkel. Alsdann messe man jeden der Winkel, bilde die Summe der jeweiligen Ziffern und vergleiche die erhaltenen Zahlen unter sich und mit der Winkelsumme von 360° .

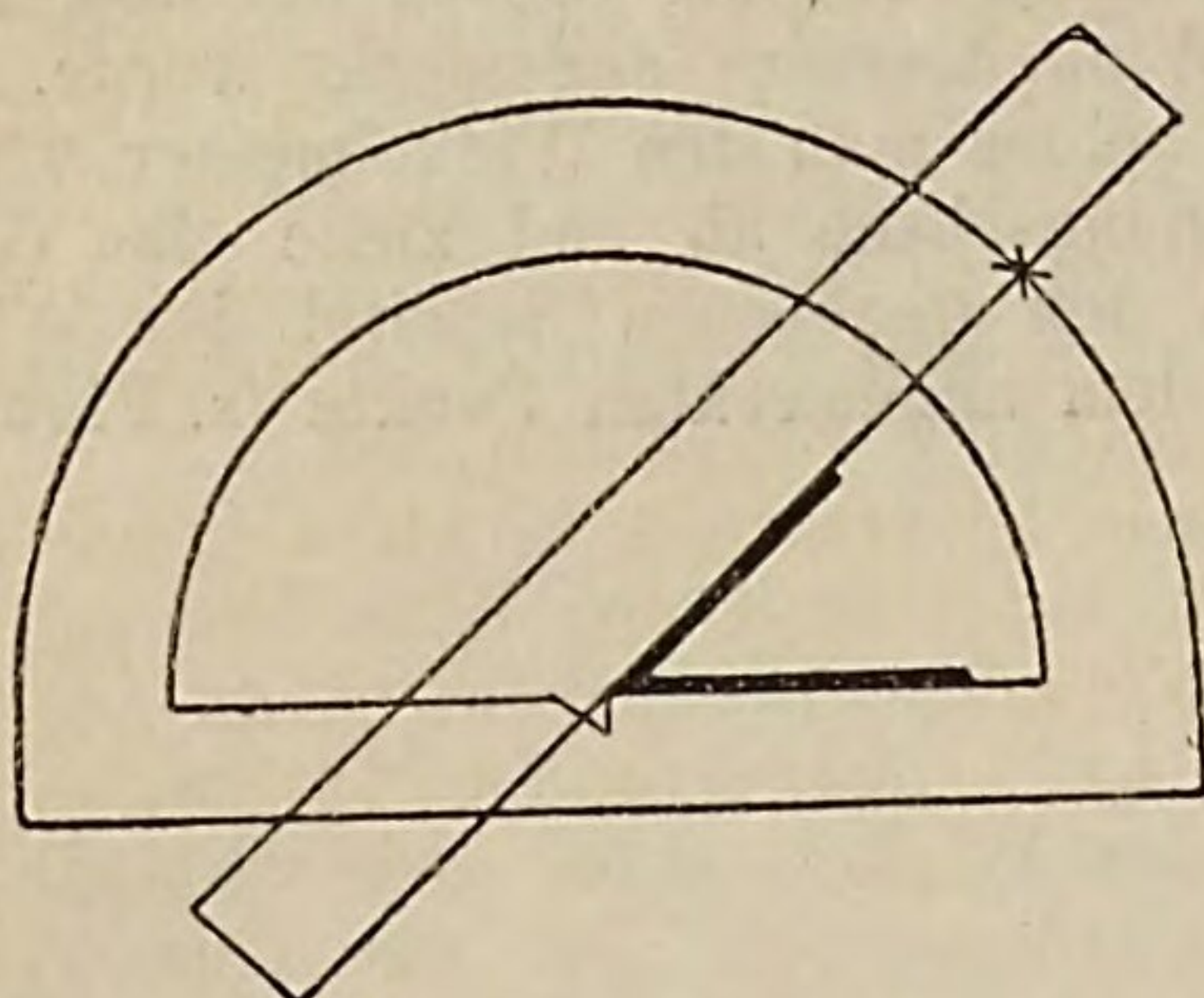
Erkl. 189. Da die Ablesung eines einzelnen Winkels mit dem Winkelmesser die Genauigkeit von etwa $\frac{1^\circ}{4}$ nicht überschreitet, so kann auch die Summe nicht leicht genau 360° betragen, sondern wird wegen der vier abgelesenen Winkel bis zum Fehler von $4 \cdot \frac{1^\circ}{4} = 1^\circ$ abweichend ausfallen können.

Auflösung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 82. Der Winkelmesser ist an jeden Strahl anzulegen: erst, indem derselbe als Anfangsschenkel betrachtet wird, dann als Endschenkel. Da die Winkel zusammen einen Vollwinkel bilden, so müsste die Summe bei genauester Ablesung 360° ergeben.

Aufgabe 91. Man zeichne ein beliebiges Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. w.; dann sollen die einzelnen Winkel jeder Figur erst abgeschätzt, hierauf gemessen werden, und endlich soll die Summe aller Winkel derselben

Figur mit der Winkelsumme nach den Lehrsätzen 12 und 13 verglichen werden.

Figur 82.

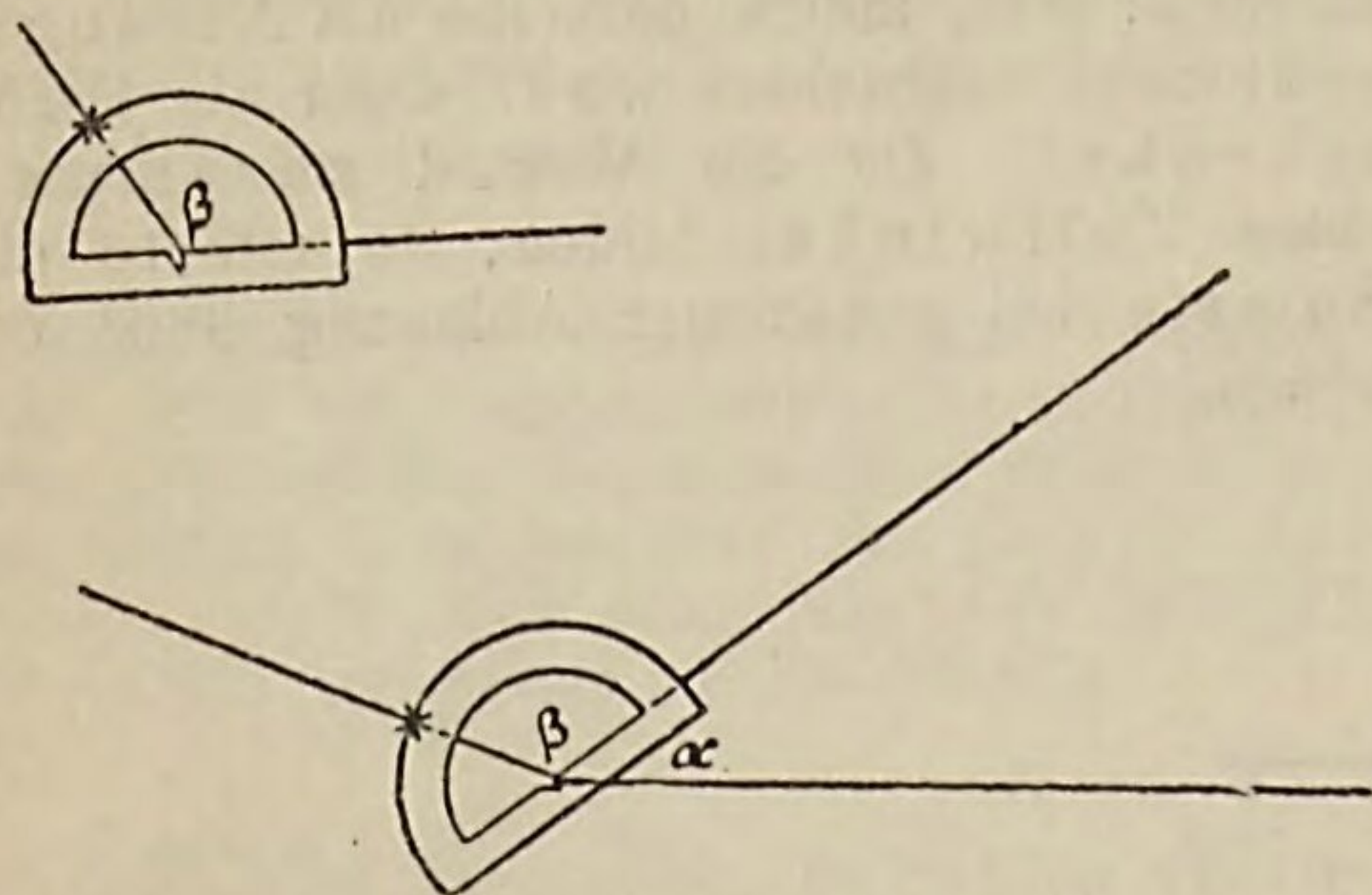


Erkl. 190. Sind die Strecken, welche von den Schenkeln eines Winkels gezeichnet, vorliegen, nicht lang genug, um die Teilungsstriche des vorhandenen Winkelmessers zu erreichen, so kann man entweder die Schenkel verlängern, oder wenn dies zur Vermeidung von Verwirrung in der Figur unterbleiben soll, so lege man erst den Winkelmesser an und alsdann auf den Winkelmesser ein Lineal längs dem der Verlängerung bedürftigen Schenkel. Als dann kann die Stelle der Teilung abgelesen werden, wo diejenige Kante des Lineals hindurchgeht, welche die Verlängerung des zweiten Winkelschenkels darstellt (s. Figur 82).

Aufgabe 92. Man soll einen gegebenen Winkel α um einen andern gegebenen Winkel β vergrössern; oder:

Die Summe zweier gegebenen Winkel α und β zu konstruieren.

Figur 83.



Erkl. 191. Beim Auflegen des Winkelmessers an den Endschenkel des Winkels α ist darauf zu achten, dass Winkel α und β im gleichen Drehungssinne gemessen werden (vergl. Erkl. 192).

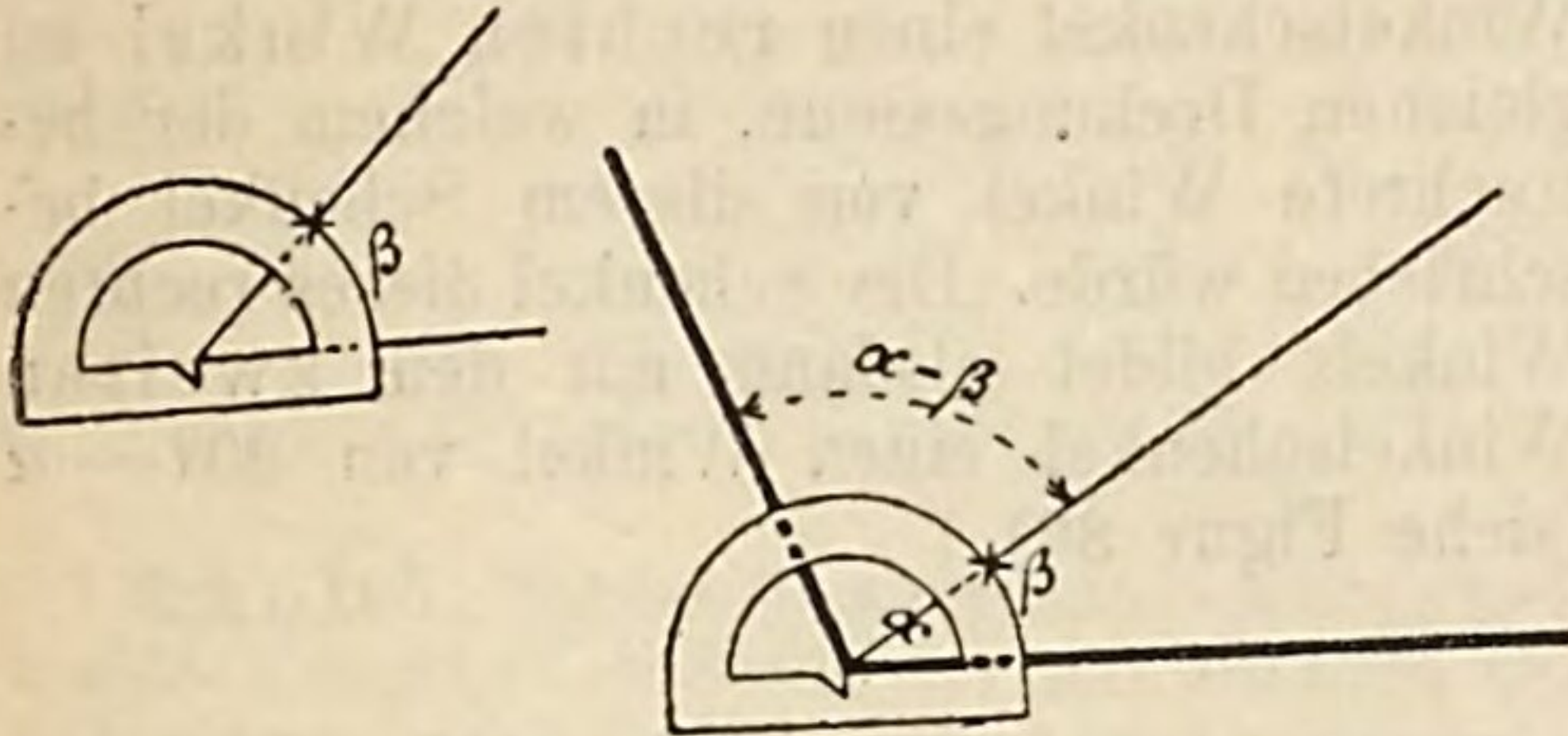
Auflösung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht dadurch, dass der Winkelmesser an jeder Vielecksseite einmal angelegt wird, um die Grösse des Innenwinkels und des Aussenwinkels abzulesen. Addiert man dann die Gradziffern der Aussenwinkel, so muss jeweils 360° entstehen; als Summe der Innenwinkel aber muss sich beim Dreieck 180° , Viereck 360° , Fünfeck 540° u. s. w. ergeben.

Auflösung. Man merke mittels des Winkelmessers oder eines andern Instrumentes (siehe Erkl. 188) die Grösse des einen Winkels, z. B. des Winkels β . Als dann lege man den Anfangsschenkel des Winkelmessers so auf den Endschenkel des andern Winkels, also des Winkels α , dass der Mittelpunkt des Winkelmessers auf den Scheitel dieses Winkels fällt und verbinde diesen Punkt mit dem auf der Teilung des Winkelmessers bezeichneten Punkte. Dadurch wird der Winkel β an dem Endschenkel des Winkels α angetragen, und der so erhaltene Endschenkel bildet mit dem Anfangsschenkel des Winkels α den Winkel $\alpha + \beta$ (siehe Fig. 83).

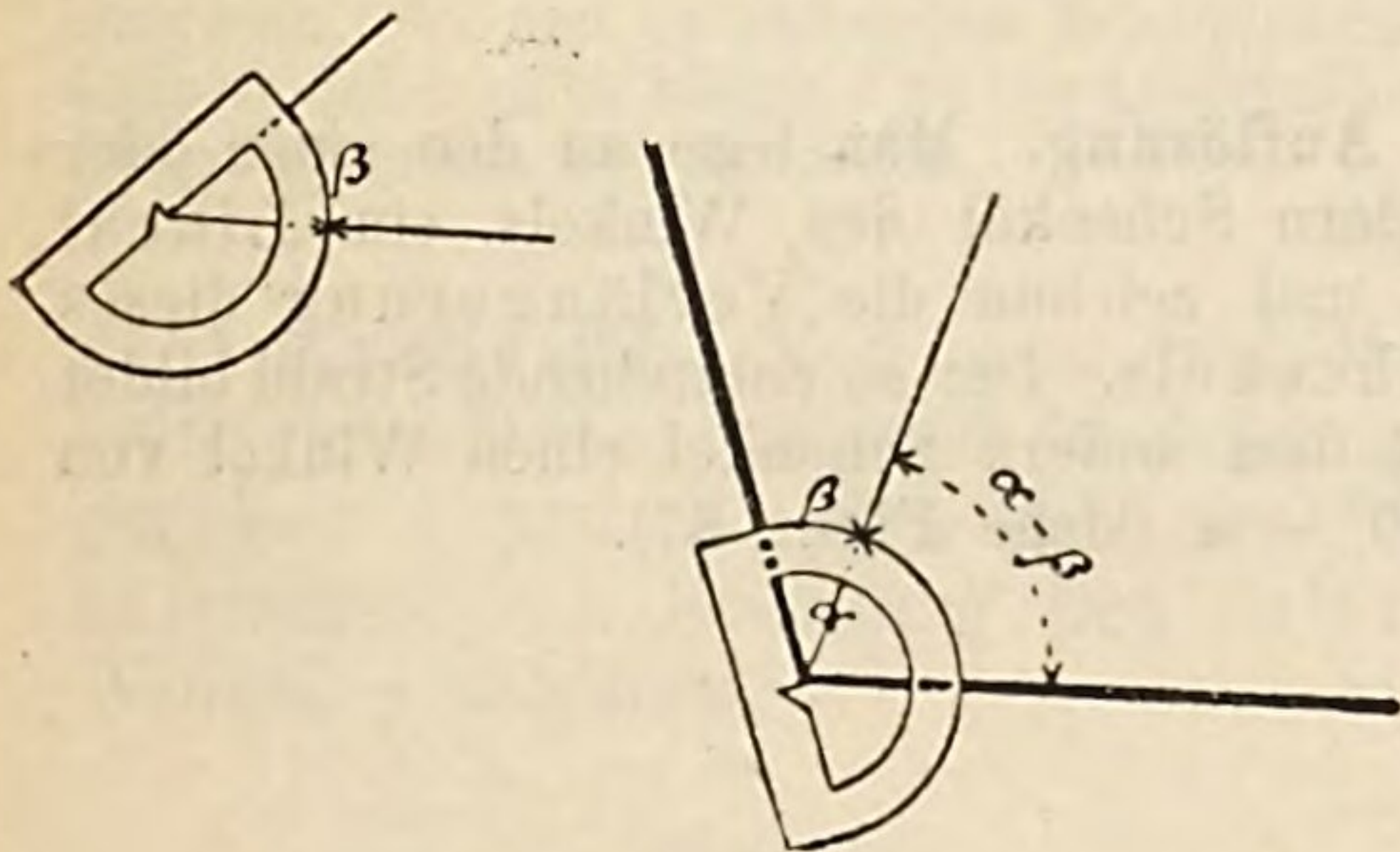
Aufgabe 93. Man soll einen gegebenen Winkel α um einen andern gegebenen Winkel β verkleinern; oder:

Die Differenz zweier gegebenen Winkel α und β zu konstruieren.

Figur 84.



Figur 85.



Erkl. 193. Denkt man sich die in den beiden vorigen Aufgaben erhaltenen Winkel $\alpha \pm \beta$ durch die Drehung der Winkelschenkel entstanden, so entsteht:

1) in Aufgabe 92 der Winkel $\alpha + \beta$ dadurch, dass der Endschenkel von α um den Betrag des Winkels β weitergedreht wird;

2) in Aufgabe 93 den Winkel $\alpha - \beta$ dadurch, dass:

- a) der Anfangsschenkel des $\angle \alpha$ um den Betrag des $\angle \beta$ nachgedreht wird, während der Endschenkel von α stehen bleibt; oder dass:
- b) der Endschenkel des $\angle \alpha$ um den Betrag des $\angle \beta$ zurückgedreht wird, während der Anfangsschenkel von α stehen bleibt.

Aufgabe 94. Man soll denjenigen Winkel konstruieren, welcher einen gegebenen Winkel α ergänzt:

- a) zu 360° ;
- b) zu 90° .

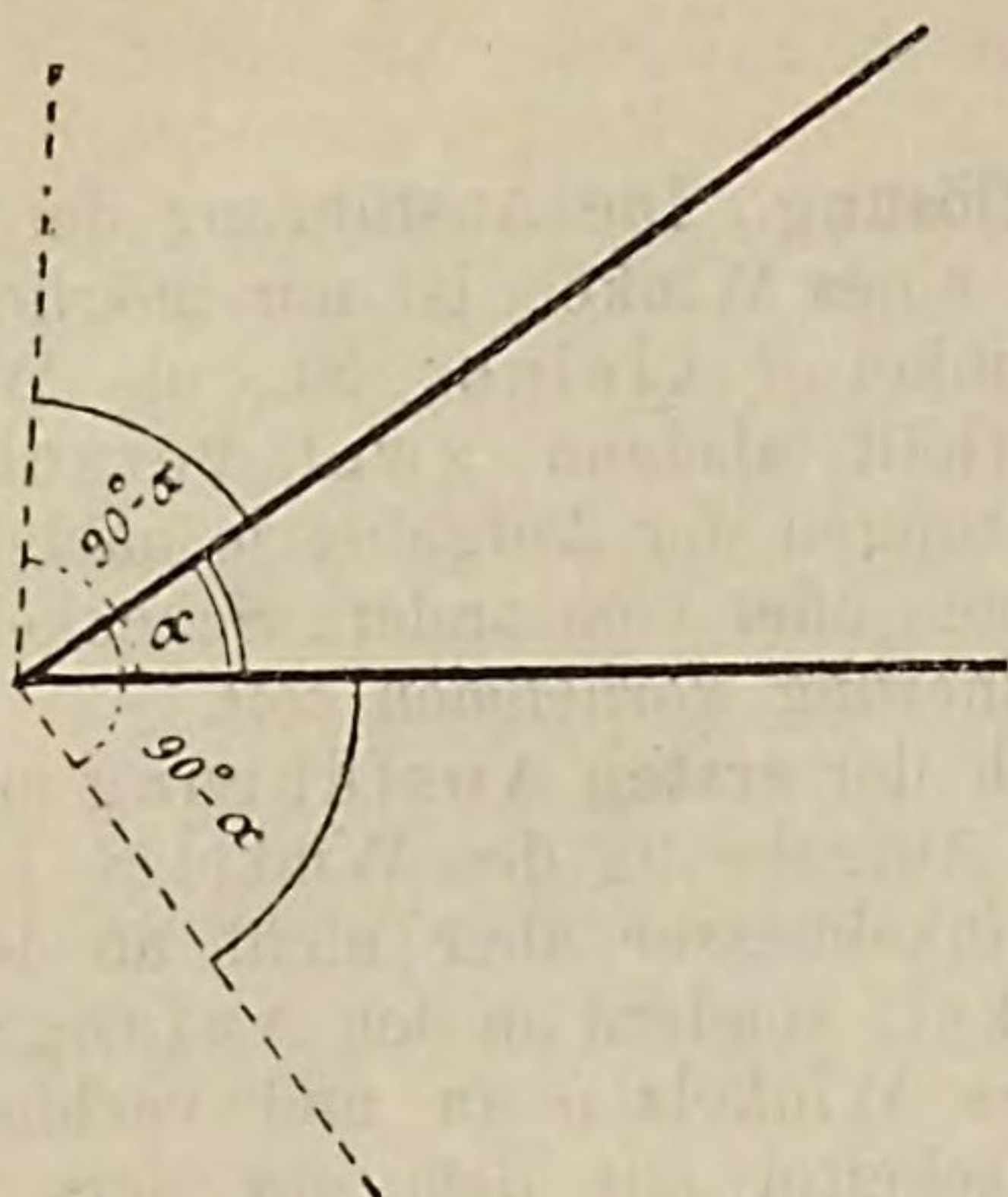
Auflösung. Die Ausführung der Verkleinerung eines Winkels ist nur möglich, wenn der Winkel β kleiner ist, als Winkel α . Man erhält alsdann zwei verschiedene Ausführungen der Aufgabe, je nachdem man vom einen oder vom andern Schenkel aus die Verkleinerung vornehmen soll.

Nach der **ersten** Ausführung misst man wie in Aufgabe 92 den Winkel β , legt dann den Winkelmesser aber nicht an den Endschenkel, sondern an den Anfangsschenkel des Winkels α an und verbindet den Winkelscheitel mit dem auf dem Winkelmesser angemarkten Punkte. Der Endschenkel des so abgetragenen Winkels β bildet mit dem Endschenkel des Winkels α den Winkel $\alpha - \beta$ (siehe Figur 84).

Nach der **zweiten** Ausführungsart misst man den Winkel β nicht im gewöhnlichen (positiven, der Uhrzeigerdrehung entgegengesetzten) Drehungssinne, sondern im umgekehrten Sinne mittels der zweiten Teilung, welche auf dem Winkelmesser angebracht zu sein pflegt. Als dann legt man den Winkelmesser nicht an den Anfangsschenkel, sondern an den Endschenkel des Winkels α an (siehe Figur 85) und trägt den $\angle \beta$ in den Innenraum des Winkels α ein. Der so entstehende Winkelschenkel bildet mit dem Anfangsschenkel des Winkels α den Winkel $\alpha - \beta$.

Auflösung. a) Der Winkel, welcher einen gegebenen Winkel zu 360° ergänzt, bedarf keiner Konstruktion, da seine Schenkel dieselben sind, wie die des ursprünglichen Winkels, und es überhaupt unmöglich ist, einen Winkel zu zeichnen, ohne seinen Er-

Figur 86.

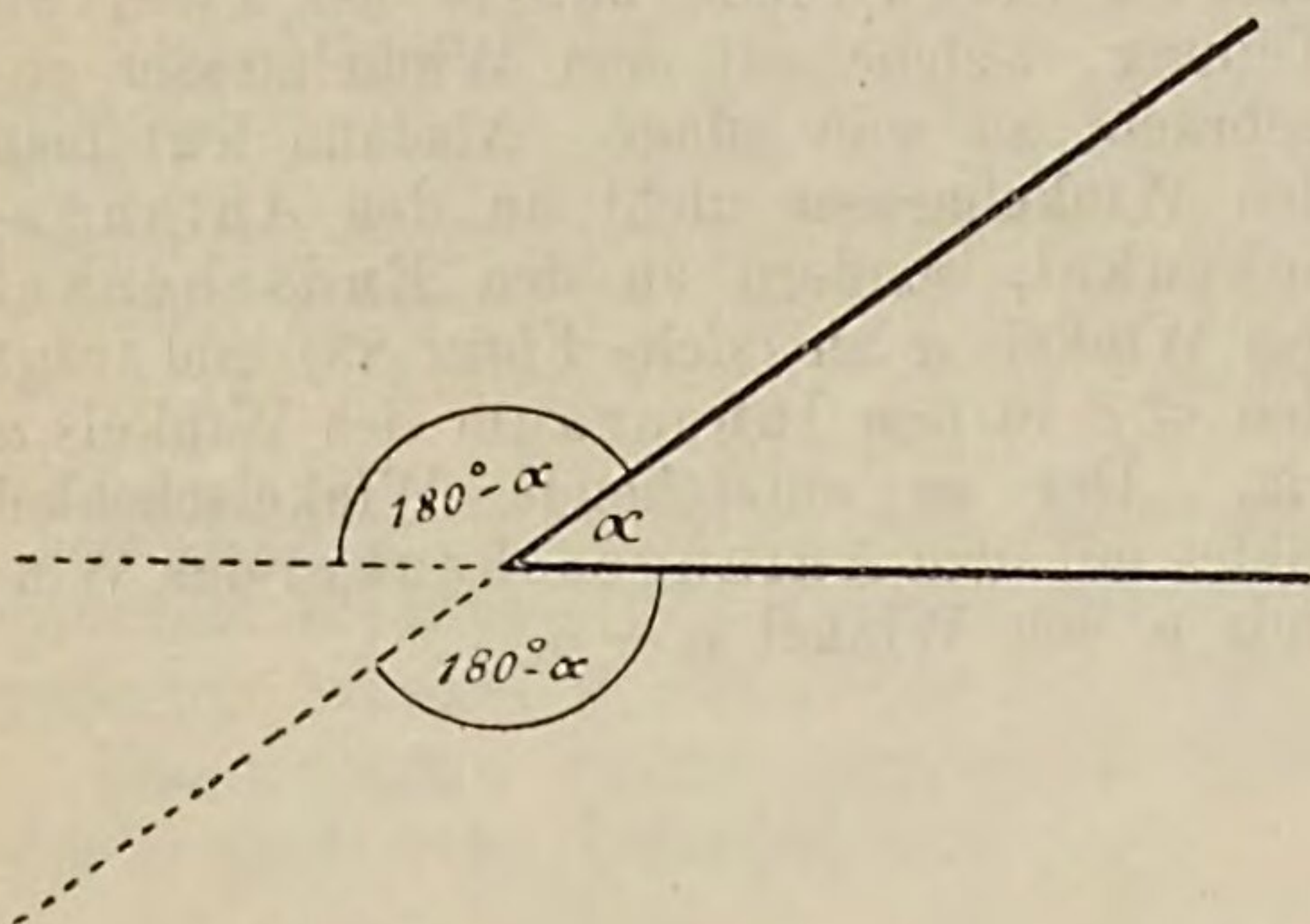


gänzungswinkel zu 360° gleichzeitig mitzuzeichnen.

b) Um den Ergänzungswinkel zu 90° oder den Komplementwinkel eines gegebenen Winkels zu konstruieren, verfähre man entweder wie in Aufgabe 93 gezeigt wurde, oder man errichte mittels des Winkelscheits im Winkelscheitel auf dem einen der Winkelschenkel einen rechten Winkel im gleichen Drehungssinne, in welchem der betrachtete Winkel von diesem Schenkel beschrieben würde. Der Schenkel dieses rechten Winkels bildet alsdann mit dem zweiten Winkelschenkel einen Winkel von $90^\circ - \alpha$ (siehe Figur 86).

Aufgabe 95. Man soll zu einem gegebenen Winkel α den Nebenwinkel oder den Supplementwinkel konstruieren.

Figur 87.



Auflösung. Man lege an den einen oder andern Schenkel des Winkels ein Lineal an und zeichne die Verlängerung dieses Schenkels. Der so entstehende Strahl bildet mit dem andern Schenkel einen Winkel von $180^\circ - \alpha$ (siehe Figur 87).

Erkl. 194. Die wichtigste Anwendung der Aufgaben 94 und 95 findet man in den Aufgaben 97 und 98 für die Winkel eines Dreiecks.

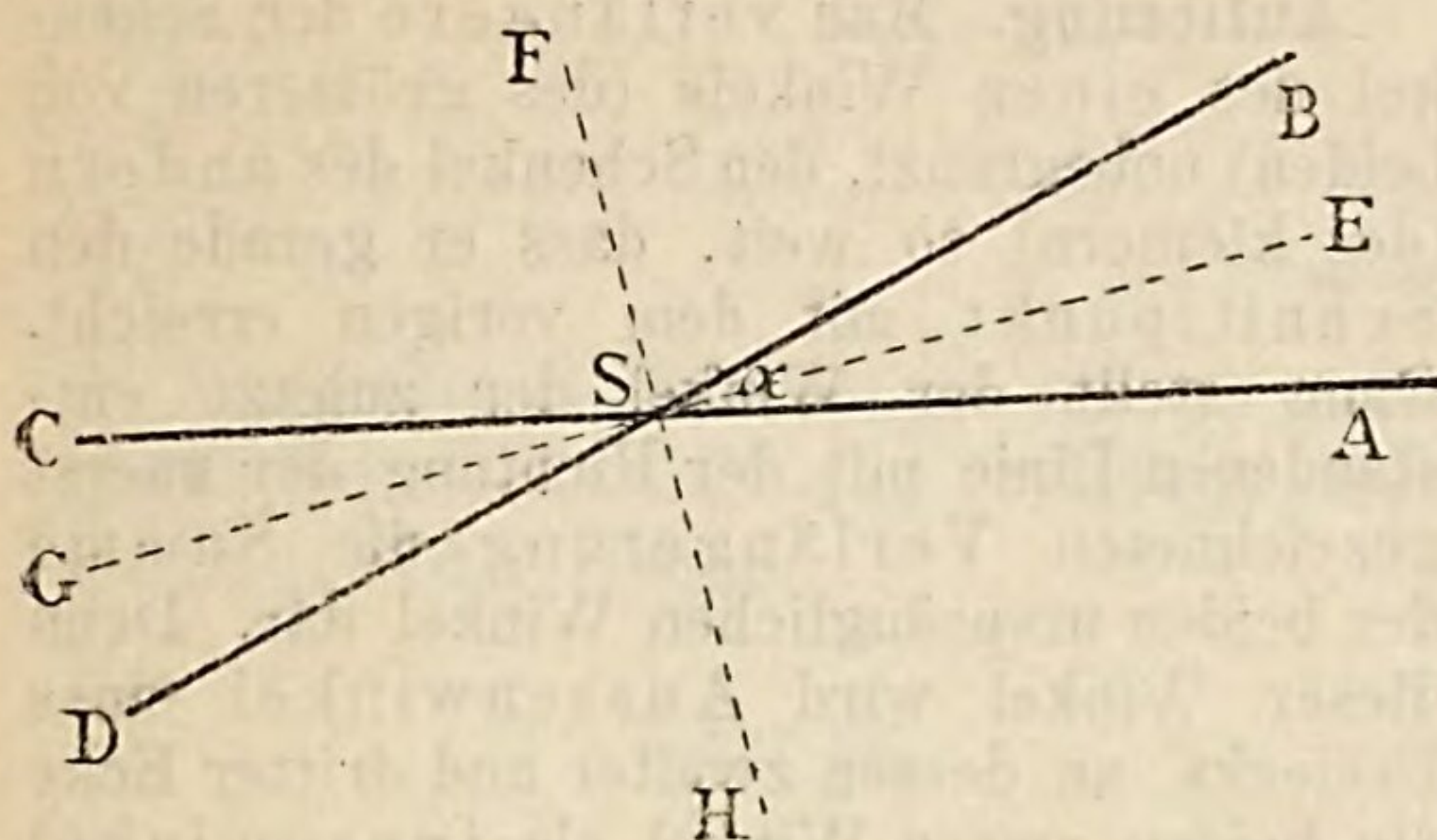
Aufgabe 96. Man zeichne einen Winkel $\alpha = 71^\circ 47' 38''$, konstruiere dessen Nebenwinkel und Scheitelwinkel; halbiere alsdann alle vier so erhaltenen Winkel und messe die von den Halbierungslinien gebildeten Winkel nach Lehrsatz 9.

Auflösung. Hat man mit dem Winkelmesser einen Winkel von $71^\circ 47' 38''$ (also wenigstens über $71\frac{3}{4}^\circ$) angetragen, so erhält man durch Verlängerung seiner Schenkel die zwei Nebenwinkel:

$BSC = ASD = 180^\circ - 71^\circ 47' 38'' = 108^\circ 12' 22''$
sowie den mit dem ursprünglichen Winkel gleich grossen Scheitelwinkel:

$CSD = 71^\circ 47' 38''$ (siehe Figur 88).

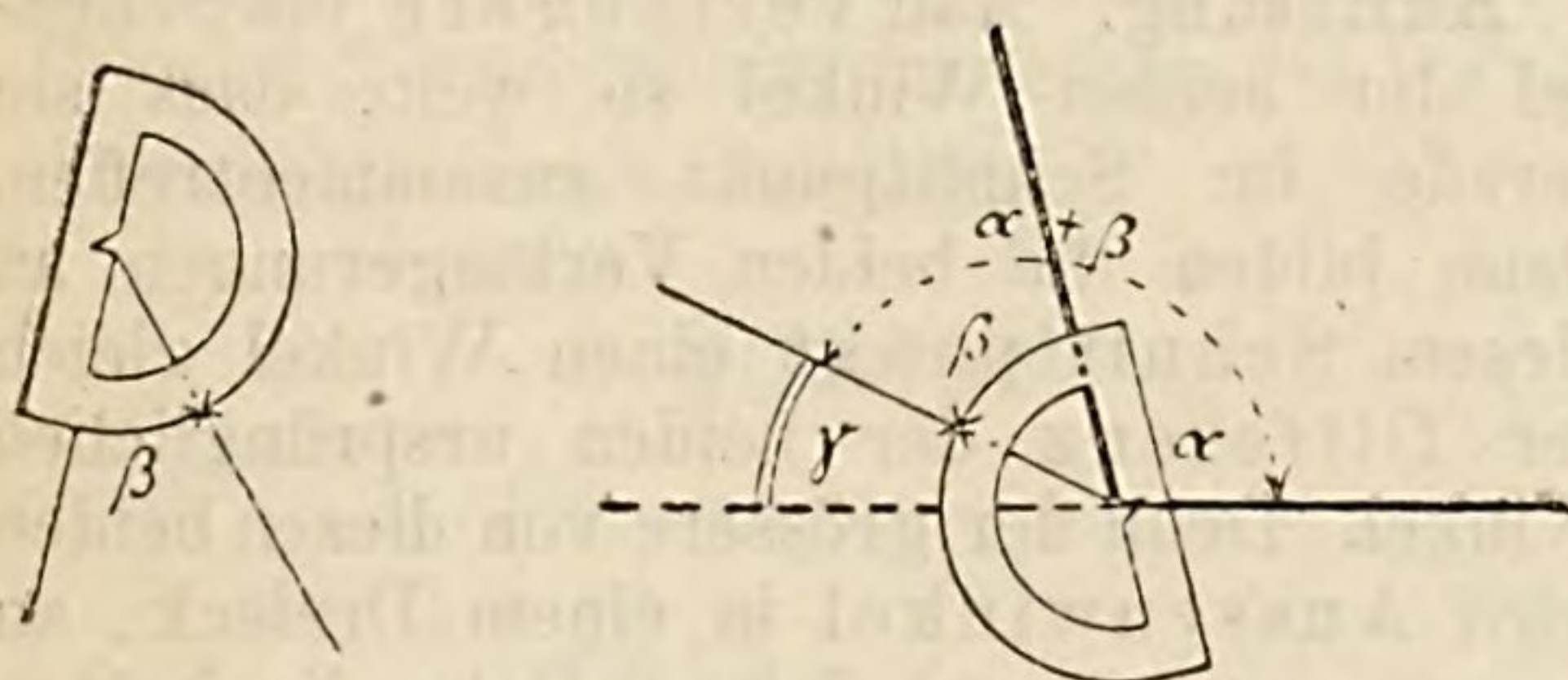
Figur 88.



Erkl. 195. Bei der Messung mit dem Winkelmesser werden an Stelle der auf Minuten und Sekunden angegebenen Ziffern nebenstehender Auflösung die diesen Angaben zunächst kommenden Ganzen und Bruchteile von Graden eintreten. In den entstehenden Winkelsummen können daher auch kleine Fehler innerhalb der Ablesungsgrenzen unterlaufen.

Aufgabe 97. Von den drei Winkeln eines Dreiecks sind in Zeichnung gegeben α und β . Man soll ohne Zuhilfenahme von Rechnung den dritten Winkel γ zeichnen.

Figur 89.



Aufgabe 98. Von den Winkeln eines rechtwinkligen Dreiecks ist gegeben der spitze Winkel α . Man soll den andern spitzen Winkel ohne Rechnung konstruieren.

Aufgabe 99. An zwei Punkten einer geraden Linie sind zwei verschiedene Winkel in entgegengesetztem Dreh-

Wird dann nach Auflösung der Aufgabe 88 jeder der vier Winkel halbiert, so müssen je vier gleiche Hälften entstehen, nämlich:

$$\begin{aligned} \sphericalangle ASE &= \sphericalangle ESB = \sphericalangle CSG = \sphericalangle GSD = 35^\circ 53' 49'' \text{ und} \\ \sphericalangle BSF &= \sphericalangle FSC = \sphericalangle DSH = \sphericalangle ASH = 54^\circ 6' 11'' \end{aligned}$$

Demnach beträgt der Winkel der Halbierungslinien ES und FS :

$$\sphericalangle ESF = \sphericalangle ESB + \sphericalangle BSF = 35^\circ 53' 49'' + 54^\circ 6' 11'' = 90^\circ$$

und der Winkel der Halbierungslinien ES und SG :

$$\sphericalangle ESG = \sphericalangle ESB + \sphericalangle BSC + \sphericalangle CSG = 35^\circ 53' 49'' + 108^\circ 12' 22'' + 35^\circ 53' 49'' = 180^\circ$$

In derselben Weise findet man, dass auch die Winkel:

$$FSG = GSH = HSE = 90^\circ$$

sind, und:

$$\sphericalangle FSH = \sphericalangle FSB + \alpha + \sphericalangle ASH = 180^\circ$$

Auflösung. Man trage an den $\sphericalangle \alpha$ noch den $\sphericalangle \beta$ an und verlängere den Anfangsschenkel von α . Diese Verlängerung bildet mit dem Endschenkel des $\sphericalangle (\alpha + \beta)$ den Winkel γ ; denn es ist richtig:

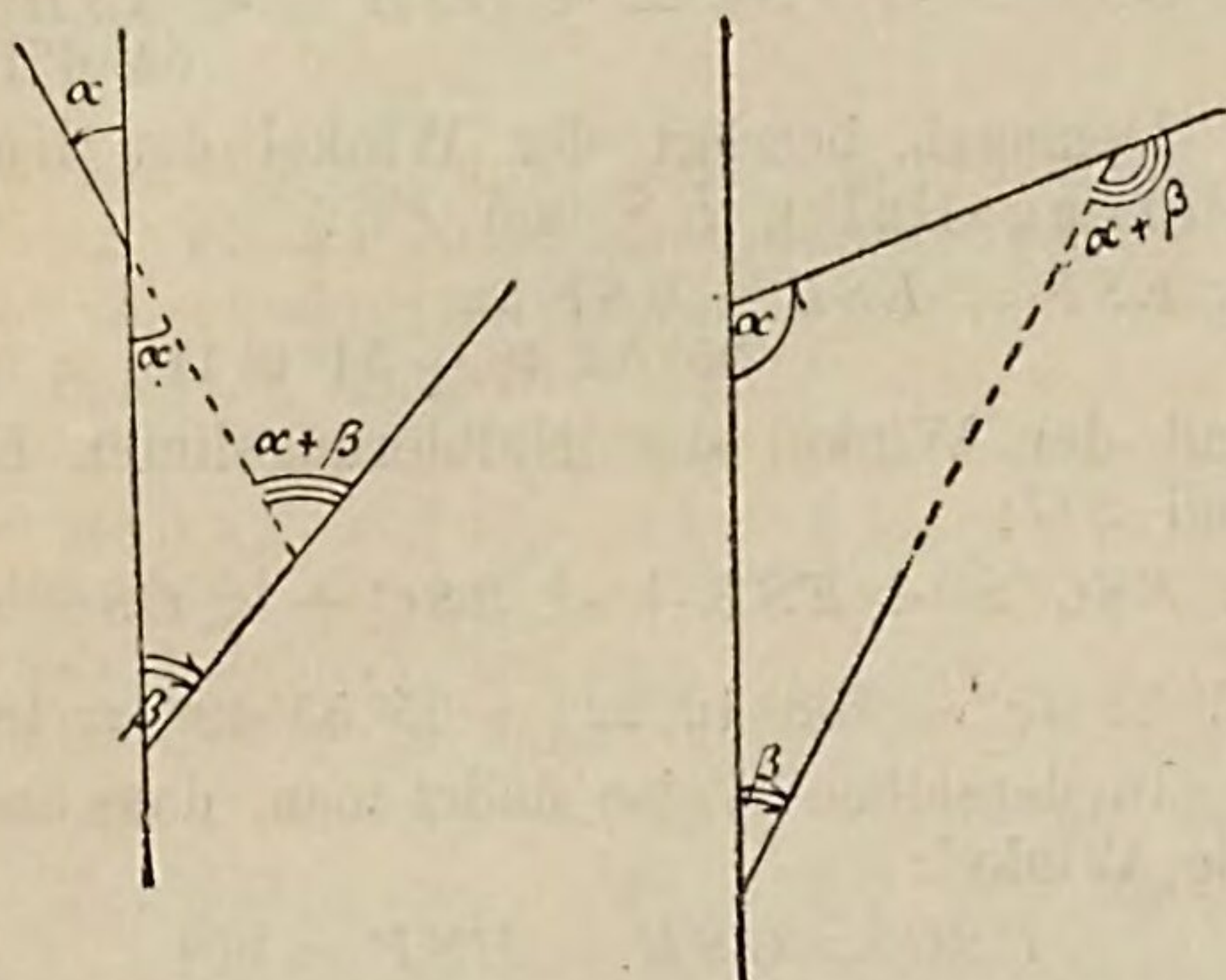
$$(\alpha + \beta) + \gamma = 180^\circ \text{ (siehe Figur 89).}$$

Auflösung. Man errichte auf einem der Schenkel von α einen rechten Winkel, so bildet dessen zweiter Schenkel mit dem Endschenkel von α einen Winkel $\beta = 90^\circ - \alpha$ wie in Aufgabe 94 gezeigt wurde.

Nach Lehrsatz 17 sind nämlich die beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks Komplementwinkel.

ungssinne angetragen; man soll die Summe der beiden Winkel ohne Messungen konstruieren.

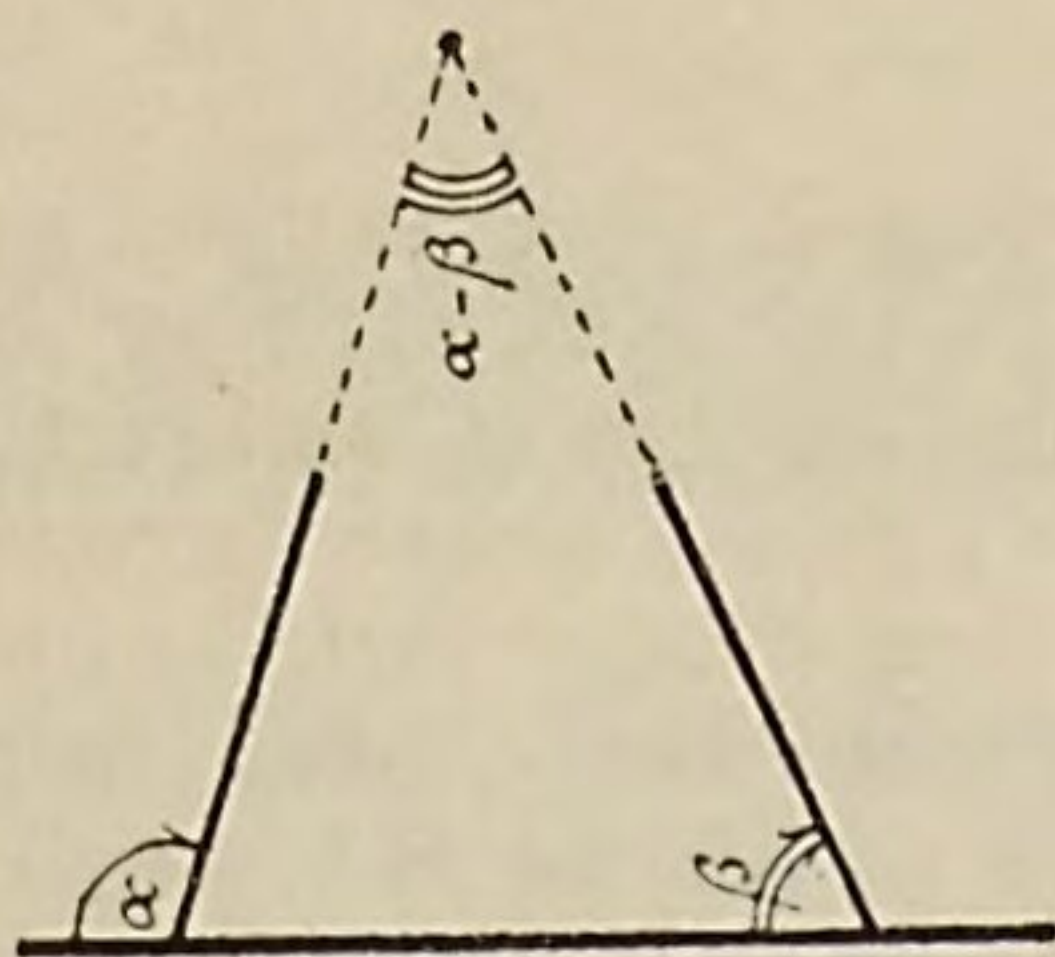
Figur 90.



Erkl. 196. Liegen die beiden Winkel auf verschiedenen Seiten der gemeinschaftlichen Geraden, so ist der Schenkel des einen Winkels rückwärts über seinen Schenkel hinaus zu verlängern.

Aufgabe 100. An zwei Punkten einer geraden Linie sind zwei Winkel in gleichem Drehungssinne angetragen; man soll die Differenz der beiden Winkel ohne Messungen konstruieren.

Figur 91.



Aufgabe 101. Man zeichne einen Kreis und zu demselben eine beliebige Anzahl von Sekanten und Tangenten. Alsdann sollen zu jedem der so entstandenen Winkel der oder die zugehörigen Kreisbögen angegeben werden.

Auflösung. Man verlängere den Schenkel des einen Winkels (des grösseren von beiden) unbegrenzt, den Schenkel des andern (des kleinern) so weit, dass er gerade den Schnittpunkt mit dem vorigen erreicht. Dann stellt der Winkel der zuletzt entstandenen Linie mit der Richtung der zuerst gezeichneten Verlängerung die Summe der beiden ursprünglichen Winkel dar. Denn dieser Winkel wird Aussenwinkel eines Dreiecks, an dessen zweiter und dritter Ecke die beiden ersten Winkel als Innenwinkel sind (siehe Figur 90).

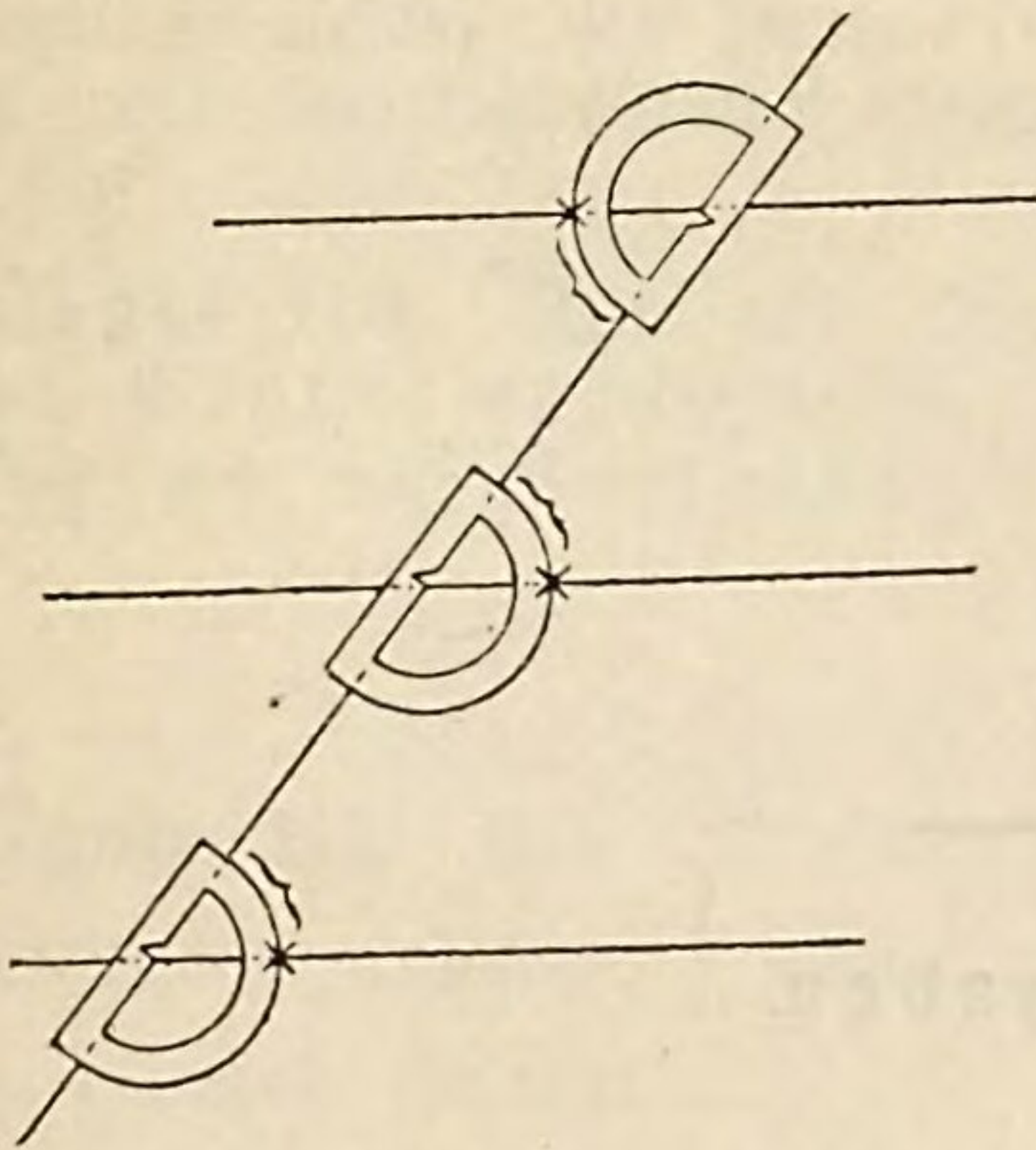
Auflösung. Man verlängere die Schenkel der beiden Winkel so weit, dass sie gerade im Schnittpunkt zusammentreffen. Dann bilden die beiden Verlängerungen an diesem Schnittpunkt einen Winkel gleich der Differenz der beiden ursprünglichen Winkel. Denn der grössere von diesen beiden wird Aussenwinkel in einem Dreieck, an dessen zweiter und dritter Ecke die beiden andern Winkel Innenwinkel werden; daher folgt die Richtigkeit der Konstruktion aus Antwort 4 auf Frage 40.

Auflösung. Man fahre mit den Fingerspitzen oder mit den Spitzen zweier Bleistifte oder sonstigem auf den Schenkeln des Winkels (und deren Verlängerungen) vom Scheitel aus so weit entlang, bis man die Peripherie erreicht hat. Dann ist der

zwischen den Spitzen befindliche, im Winkelraum des Winkels liegende Teil der Kreislinie der zu dem Winkel gehörige Kreisbogen, oder der Kreisbogen, „auf welchem der Winkel steht“.

Aufgabe 102. Man soll zu einer gegebenen Geraden g beliebig viele Parallelen ziehen.

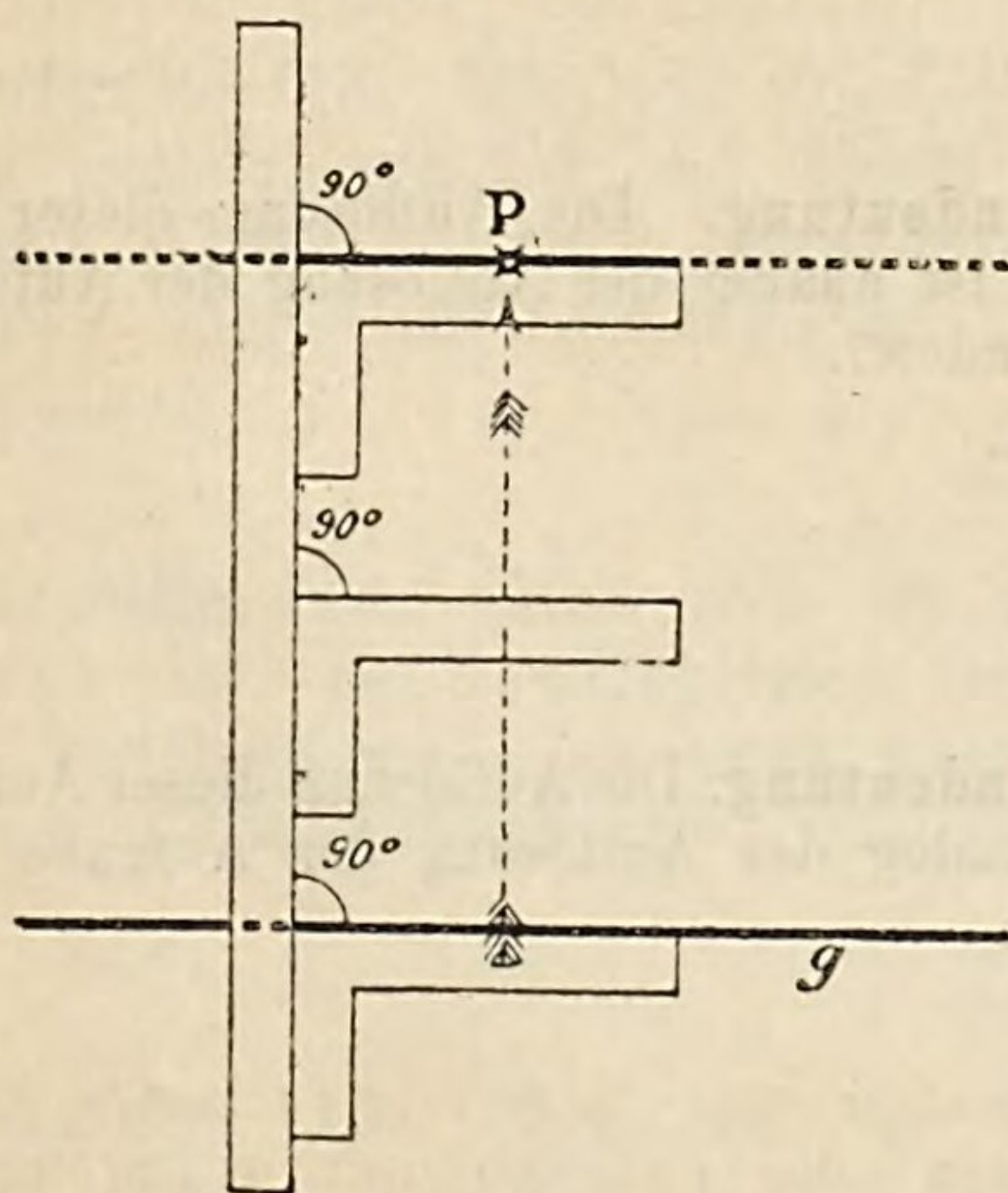
Figur 92.



Auflösung. Man schneide die gegebene Gerade g durch eine beliebige Transversale und trage an dieser mittels des Winkelmessers den Winkel zwischen ihr und der gegebenen Geraden in beliebigen Punkten entweder als korrespondierenden oder als Wechselwinkel mehrfach ab (siehe Figur 92). Die zweiten Schenkel der so entstehenden Winkel sind nach Lehrsatz 23 mit der ersten (und nach Lehrsatz 28 auch unter sich) parallel.

Aufgabe 103. Zu einer gegebenen Geraden g soll durch einen gegebenen Punkt P ausserhalb derselben die Parallele gezeichnet werden.

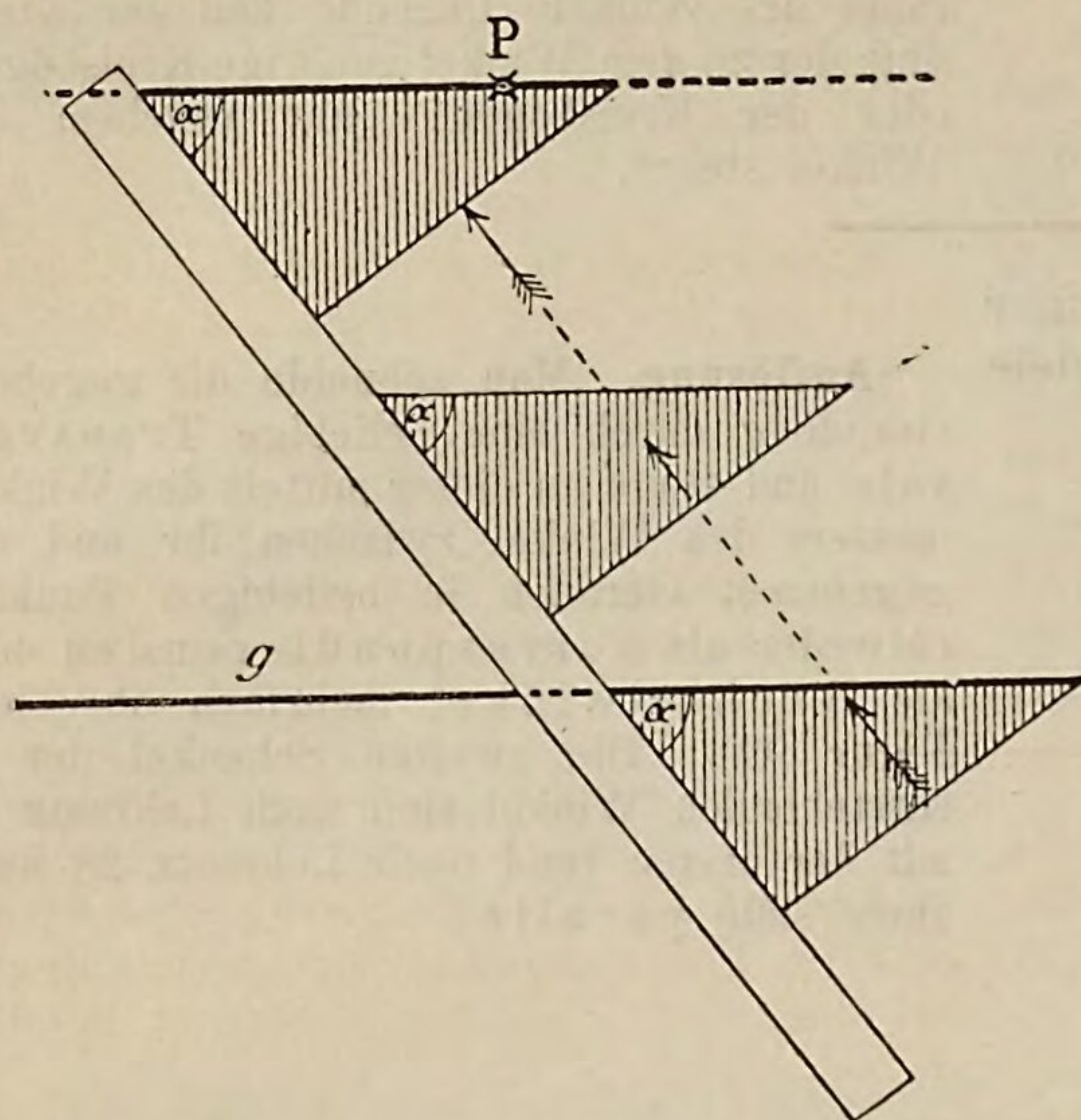
Figur 93.



Auflösung 1. Man verfähre wie in voriger Aufgabe, indem man die Transversale durch den gegebenen Punkt P gehen lässt, und in ihm selbst den Winkel mittels des Winkelmessers anträgt.

Auflösung 2. Man lege den einen Schenkel des Winkelscheits an die Gerade g an, und an den darauf senkrechten Schenkel werde das Lineal genau angepasst und auf der Zeichnungsebene festgehalten. Alsdann schiebe man das Winkelscheit längs dem festgehaltenen Lineale fort, bis der ursprünglich an der Geraden g angelegte Schenkel desselben durch den Punkt P geht. Während der Verschiebung ist genau darauf zu achten, dass das Lineal sich nicht verrückt, und dass der an demselben anliegende Schenkel des Winkelscheits stets genau dem Lineal angepasst bleibe. Zieht man in der erlangten Lage des Winkelscheits einen Strich längs dem durch P gehenden Schenkel, so stellt diese Gerade eine Parallele zu g durch P dar, denn sie ist ebenso wie g senkrecht zu der durch die Linealkante dargestellten Transversalen (s. Figur 93).

Figur 94.



Auflösung 3. Das gleiche Verfahren, welches eben für die rechtwinkligen Schenkel des Winkelscheits angegeben wurde, kann auch für zwei beliebige andere Schenkel eines Winkelscheits angewendet werden (s. Figur 94), indem auch dann gleiche korrespondierende Winkel, und infolge dessen parallele Schnitlinien der durch die Linealkante dargestellten Transversalen entstehen.

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 104. Man soll mittels des Winkelmessers Winkel konstruieren von:

- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1) 34° | 2) 90° | 3) 140° | 4) 185° |
| 5) 200° | 6) 270° | 7) 300° | |

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgaben ist analog der Auflösung der Aufgaben 81 und 87.

Aufgabe 105. Man soll mittels des Winkelmessers die Grösse verschiedener beliebig gezeichneter spitzer, stumpfer, überstumpfer und übervoller Winkel abmessen, nachdem dieselbe nach dem Augenmass abgeschätzt worden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 82 und 87.

Aufgabe 106. Ein gegebener Winkel soll mittels des Winkelmessers in drei oder in vier gleiche Teile geteilt werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 88.

Aufgabe 107. Man soll einen gegebenen Winkel mittels eines beliebigen Stückes Papier an eine andere Stelle übertragen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 89 und Erkl. 188.

Aufgabe 108. Man trage an einer Seite einer geraden Linie eine Anzahl Winkel am gleichen Scheitel aneinander an, schätze und messe jeden derselben und vergleiche die Summe dieser Ziffern mit der Winkelsumme 180° .

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 90.

Aufgabe 109. Man zeichne beliebige verschiedene Arten von Fünfecken, schätze und messe deren Winkel und vergleiche die Summe dieser Ziffern nach den Lehrsätzen 12 und 13.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 42 und 91.

Aufgabe 110. Man soll einen gegebenen Winkel verdoppeln, verdreifachen, vervierfachen u. s. w.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 92, indem der zu addierende Winkel dieselbe Grösse α hat.

Aufgabe 111. Man soll einen Winkel zeichnen, welcher $\frac{2}{3}$ eines gegebenen Winkels beträgt.

Andeutung. Die Auflösung der Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 88 und 110.

Aufgabe 112. Es seien zwei Winkel α und β gegeben. Man soll einen Winkel φ konstruieren, welcher gleich $3\alpha \pm 2\beta$ sei.

Andeutung. Die Auflösung der Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 92 und 93.

Aufgabe 113. Man soll einen Winkel α suchen, welcher mit einem gegebenen Winkel β einen gegebenen Winkel σ oder δ zur Summe oder Differenz hat.

Andeutung. Die Auflösung der Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 92 und 93.

Aufgabe 114. Man soll die drei Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks konstruieren, das zwei gleich grosse spitze Winkel hat.

Andeutung. Die Auflösung der Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 97 und 98.

Aufgabe 115. Man soll die drei Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks konstruieren, von dessen spitzen Winkeln der eine das Doppelte des andern ist.

Aufgabe 116. Ein Dreieck habe einen gegebenen stumpfen Winkel γ und ausserdem zwei gleich grosse spitze Winkel α und β . Man soll diese zeichnen.

Aufgabe 117. Ein Dreieck habe zwei gleich grosse Winkel von gegebener Grösse α . Man soll den dritten Winkel konstruieren.

Aufgabe 118. Von den vier Winkeln eines Vierecks kennt man α und β . Man soll die zwei andern konstruieren, wenn bekannt ist, dass beide gleich seien.

Andeutung. Die Auflösung der Aufgaben 115 bis 118 ist analog der Aufgaben 97 und 98 und stützt sich auf die Lehrsätze 13 und Antwort 38.

Aufgabe 119. Man soll mit Benutzung der Innenkante CD oder EF des in den Figuren 22 und 75 dargestellten Winkelscheites eine Anzahl von parallelen Linien zeichnen.

Andeutung. Die Auflösung der Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 84 und 103.

Aufgabe 120. Es sei gegeben ein Kreis und ein beliebiges Bogenstück desselben. Man soll beliebige Sehnenwinkel, Mittelpunktswinkel, Peripheriewinkel, Sekantenwinkel zeichnen, welche auf diesem Bogen stehen.

Andeutung. Die Auflösung der Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 101 und Antworten auf die Fragen 43 bis 46.

C. Aufgaben, in welchen die Beweise zu aufgestellten Behauptungen gefordert werden.

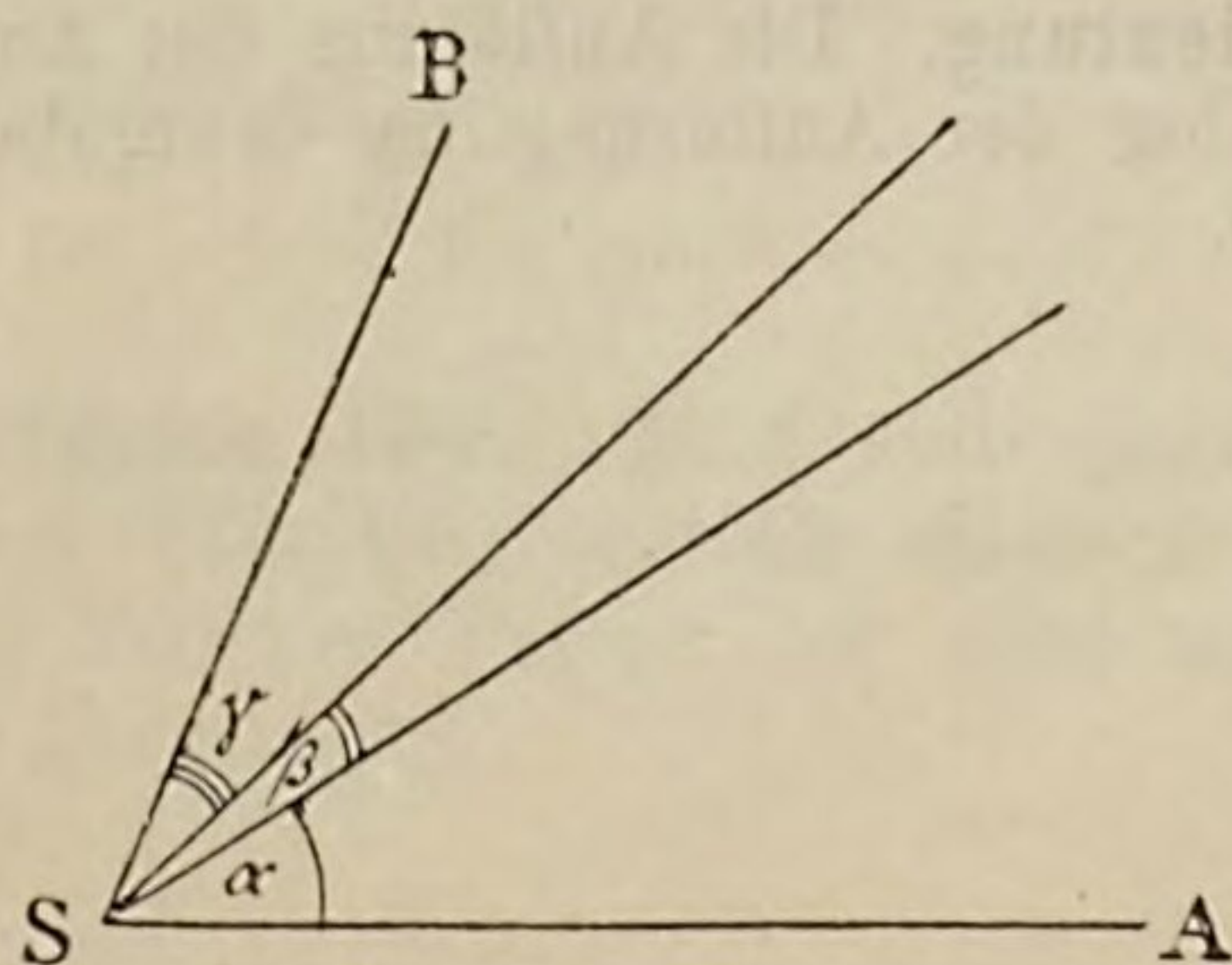
Aufgabe 121. Ist in den Figuren 95 und 96:

$$\sphericalangle \alpha = \delta, \quad \sphericalangle \beta = \varepsilon, \quad \sphericalangle \gamma = \zeta$$

so soll nachgewiesen werden, dass auch:

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle COD.$$

Figur 95.



Auflösung. Den Beweis der Richtigkeit der nebenstehenden Behauptung kann man wie folgt führen:

Nach den Figuren 95 und 96 ist:

$$1) \dots \sphericalangle ASB = \alpha + \beta + \gamma$$

$$2) \dots \sphericalangle COD = \varepsilon + \zeta + \delta$$

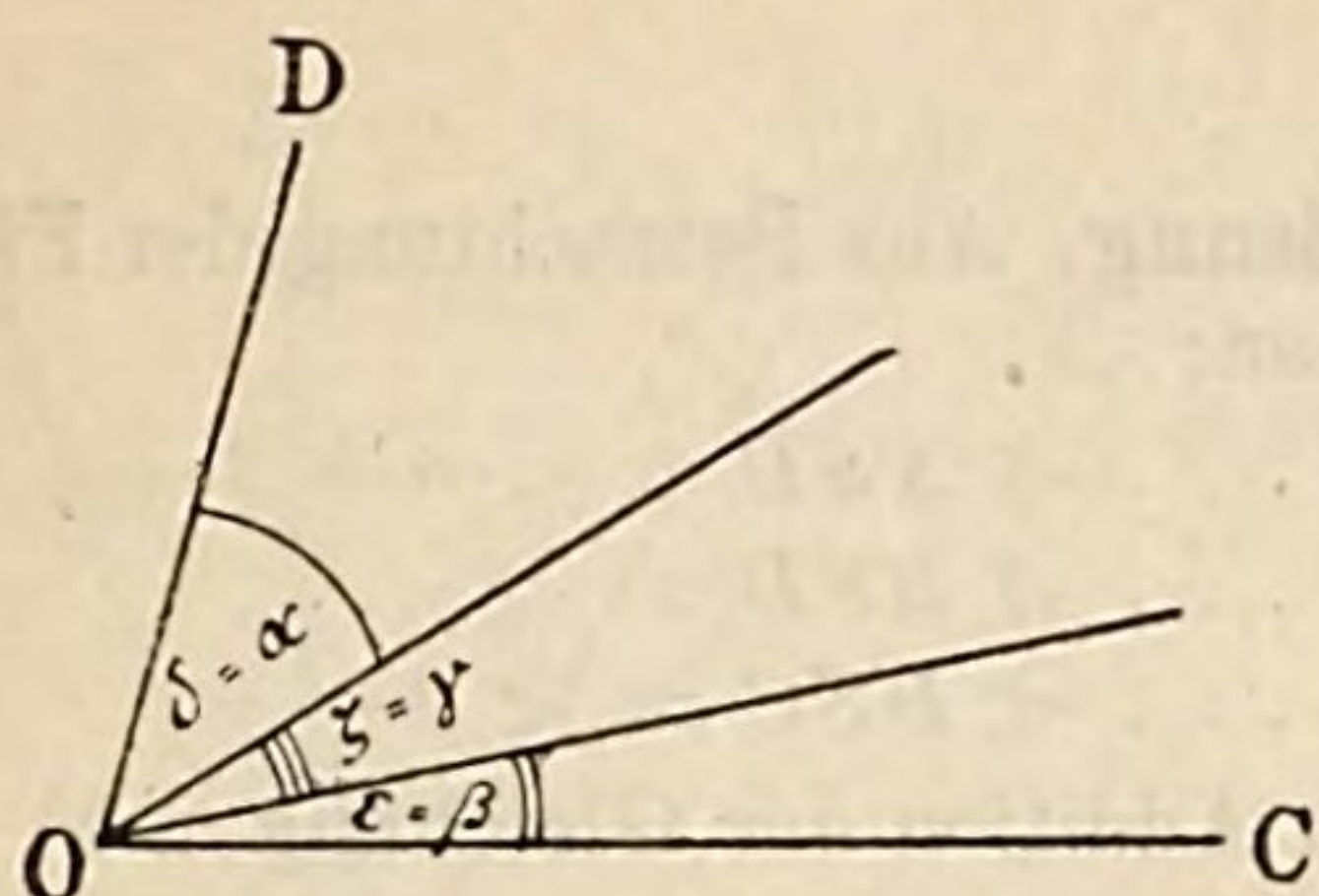
Da aber nach Voraussetzung:

$$\sphericalangle \alpha = \delta, \quad \sphericalangle \beta = \varepsilon, \quad \sphericalangle \gamma = \zeta$$

ist, so kann man in Gleichung 2) für ε , ζ , δ die diesen gleichen Winkelwerte β , γ , α einsetzen und erhält dadurch für:

$$2) \dots \sphericalangle COD = \varepsilon + \zeta + \delta = \beta + \gamma + \alpha$$

Figur 96.



Da aber:

$$\beta + \gamma + \alpha = \alpha + \beta + \gamma$$

ist, so ist damit auch nachgewiesen, dass:

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle COD$$

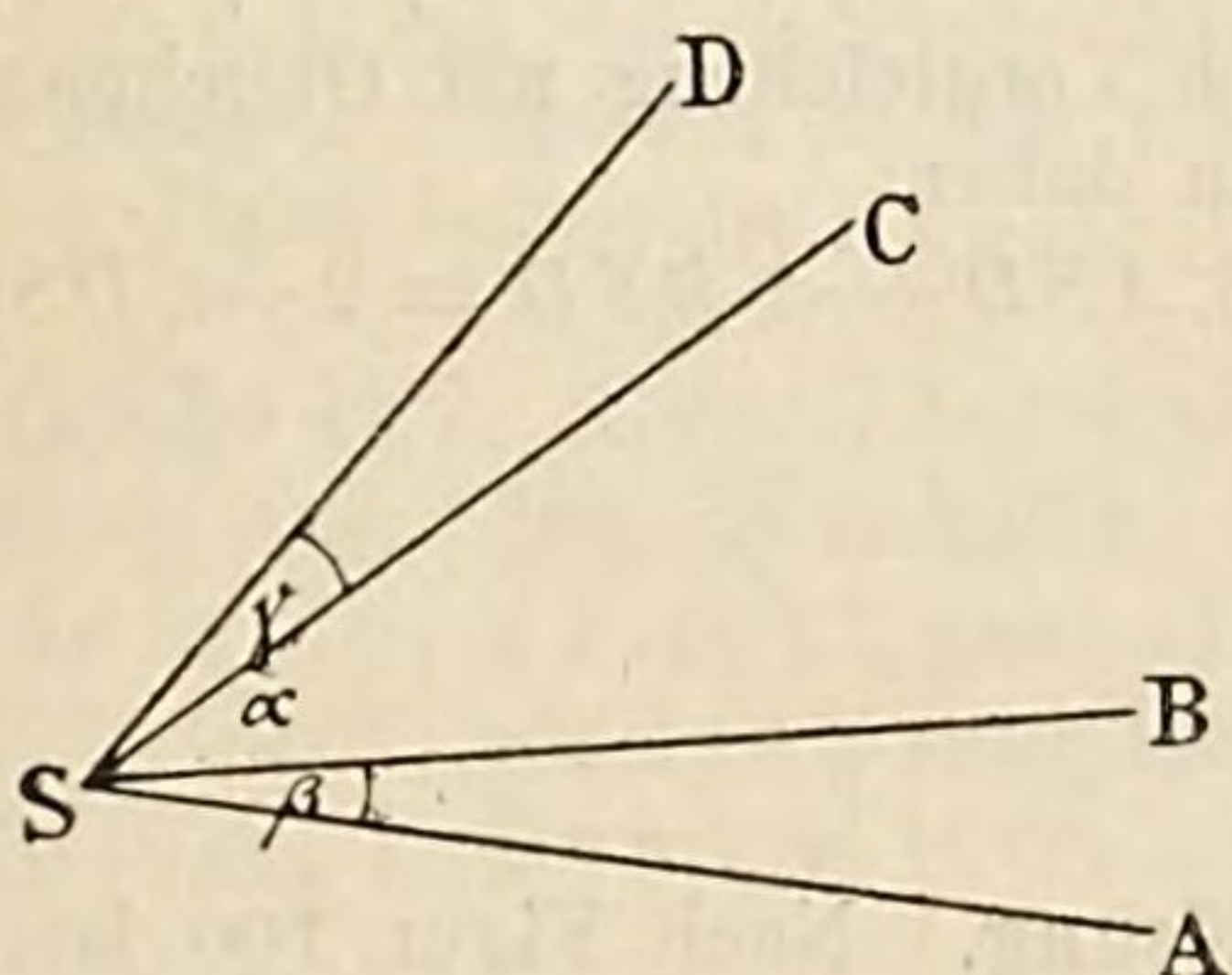
Aufgabe 122. In Figur 97 ist:

$$\sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma$$

man soll beweisen, dass auch:

$$\sphericalangle ASC = \sphericalangle BSD$$

Figur 97.



Auflösung. Nach Ansicht der Figur 97 erkennt man, dass:

$$\sphericalangle ASC = \sphericalangle \alpha + \beta$$

und

$$\sphericalangle BSD = \sphericalangle \alpha + \gamma$$

Da aber nach Voraussetzung:

$$\beta = \gamma$$

ist, so muss auch:

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma$$

sein; also auch:

$$\sphericalangle ASC = \sphericalangle BSD$$

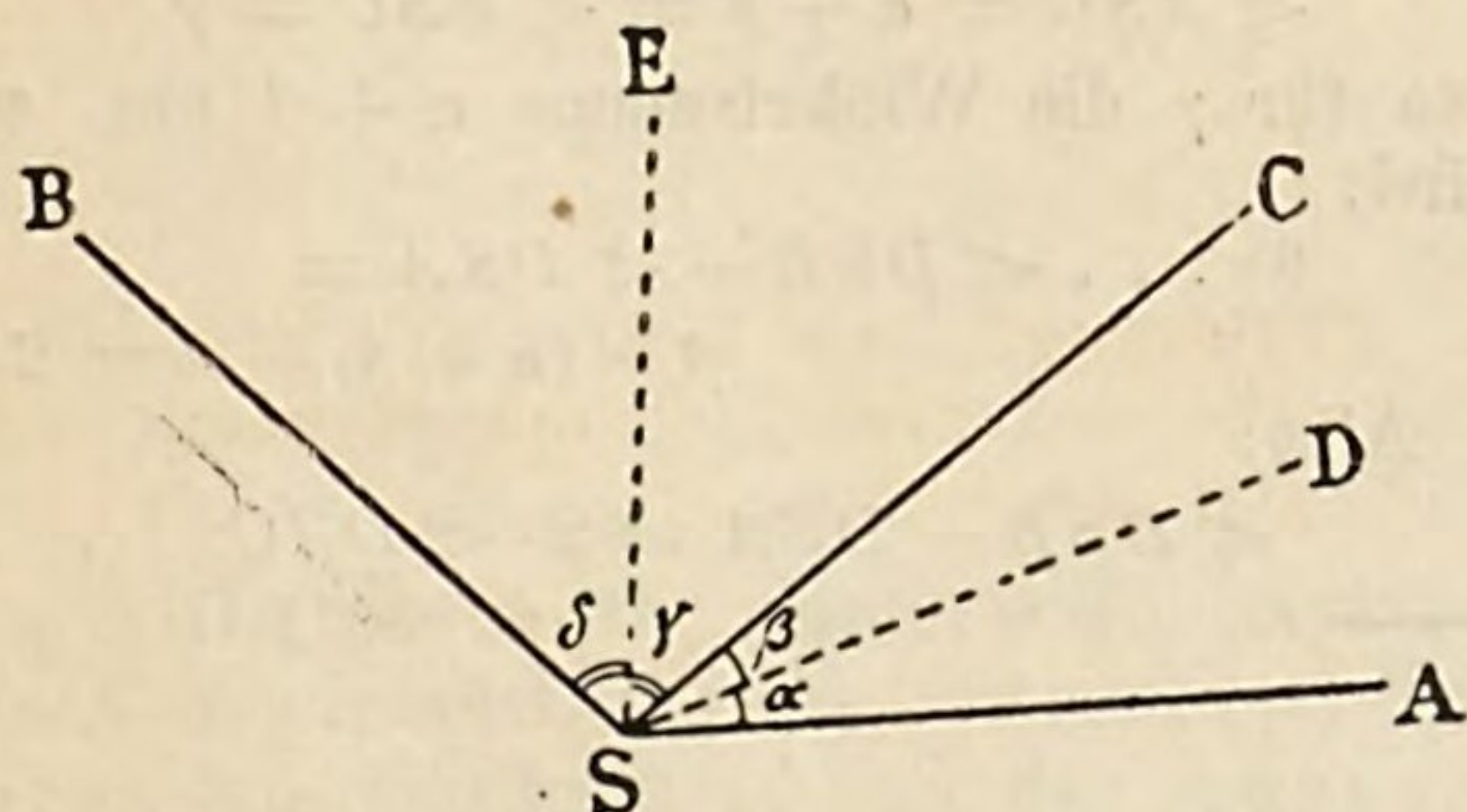
Aufgabe 123. Ist in Figur 98:

$$\sphericalangle \alpha = \beta \text{ und } \sphericalangle \gamma = \delta$$

so wird behauptet, dass:

$$\sphericalangle DSE = \frac{1}{2} \sphericalangle ASB$$

Figur 98.



Auflösung. Aus Figur 98 erkennt man, dass:

$$1) \dots \sphericalangle DSE = \beta + \gamma$$

$$2) \dots \sphericalangle ASB = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

Da aber nach Voraussetzung:

$$\sphericalangle \alpha = \beta \text{ und } \sphericalangle \gamma = \delta$$

ist, so kann man in Gleichung 2) für α und δ die gleichen Winkelwerte β und γ einsetzen und erhält dadurch die Gleichung:

$$3) \dots \sphericalangle ASB = \beta + \beta + \gamma + \gamma = 2\beta + 2\gamma = 2(\beta + \gamma)$$

Durch Vergleichung mit Gleichung 1) erhält man also:

$$\sphericalangle ASB = 2 \cdot \sphericalangle DSE$$

also umgekehrt:

$$\sphericalangle DSE = \frac{1}{2} \sphericalangle ASB$$

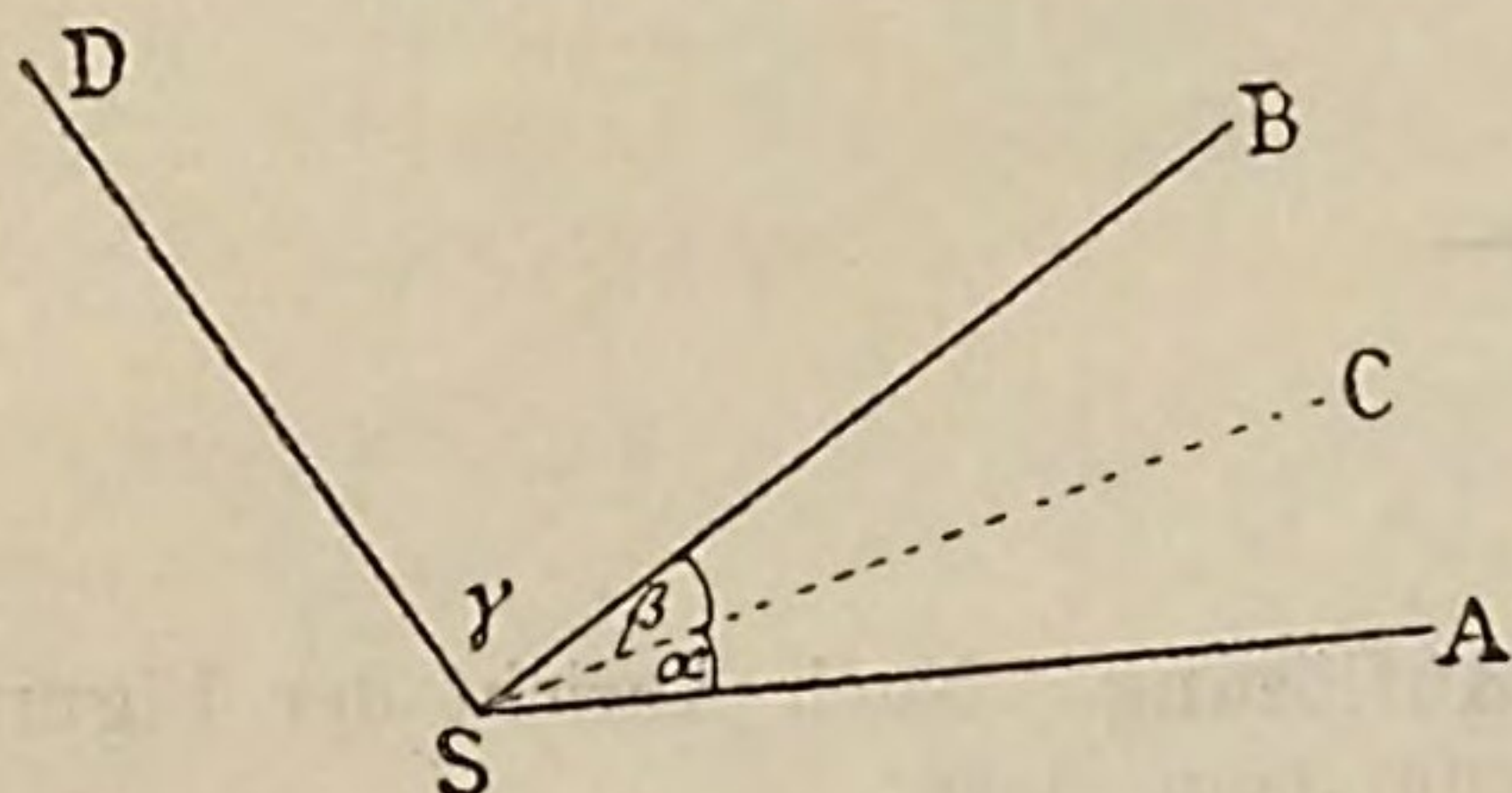
Aufgabe 124. In Figur 99 ist:

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$$

man beweise, dass:

$$\sphericalangle ASD + \sphericalangle BSD = 2 \cdot \sphericalangle DSC$$

Figur 99.



Auflösung. Aus Betrachtung der Figur 99 erhält man:

$$1) \dots \sphericalangle ASD = \sphericalangle \alpha + \beta + \gamma$$

$$2) \dots \sphericalangle BSD = \sphericalangle \gamma$$

$$3) \dots \sphericalangle DSC = \sphericalangle \beta + \gamma$$

Durch Addition der Gleichungen 1) und 2) entsteht:

$$4) \dots \sphericalangle ASD + \sphericalangle BSD = \alpha + \beta + \gamma + \gamma$$

Da aber nach Voraussetzung:

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$$

so kann man in Gleichung 4) für α den $\sphericalangle \beta$ einsetzen, so dass:

$$4) \dots \sphericalangle ASD + \sphericalangle BSD = \beta + \beta + \gamma + \gamma = 2(\beta + \gamma)$$

Durch Vergleichung mit Gleichung 3) erhält man daher:

$$\sphericalangle ASD + \sphericalangle BSD = 2 \cdot \sphericalangle DSC$$

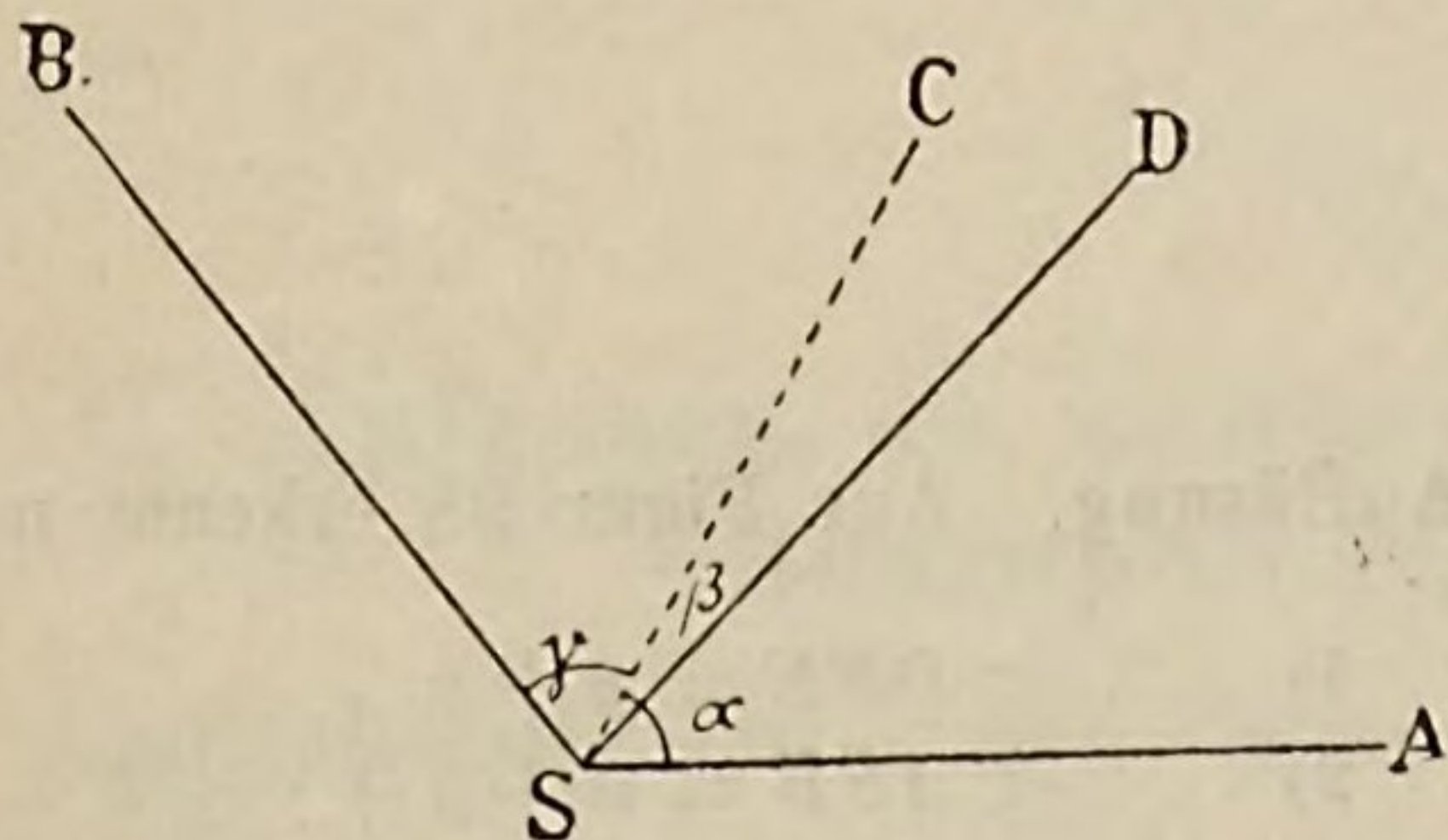
Aufgabe 125. Wenn in Figur 100:

$$\sphericalangle ASC = \sphericalangle BSC$$

so muss auch sein:

$$\sphericalangle DSB - \sphericalangle DSA = 2 \cdot \sphericalangle DSC$$

Figur 100.



Auflösung. Nach Figur 100 ist:

$$1) \dots \sphericalangle DSB = \sphericalangle \beta + \gamma$$

$$2) \dots \sphericalangle DSA = \alpha$$

$$3) \dots \sphericalangle DSC = \beta$$

$$4) \dots \sphericalangle BSC = \gamma$$

$$5) \dots \sphericalangle ASC = \alpha + \beta$$

Subtrahiert man also die Gleichung 2) von Gleichung 1), so entsteht:

$$6) \dots \sphericalangle DSB - \sphericalangle DSA = \beta + \gamma - \alpha$$

Setzt man hierin nach Voraussetzung:

$$\sphericalangle ASC = \alpha + \beta = \sphericalangle BSC = \gamma$$

also für γ die Winkelsumme $\alpha + \beta$ ein, so wird:

$$6) \dots \sphericalangle DSB - \sphericalangle DSA = \beta + (\alpha + \beta) - \alpha = 2\beta$$

Also:

$$\sphericalangle DSB - \sphericalangle DSA = 2 \cdot \sphericalangle DSC$$

Aufgabe 126. In Figur 101 ist:

$$\sphericalangle ASC = \sphericalangle CSB$$

und

$$\sphericalangle ASE = \sphericalangle ESD$$

man beweise, dass:

$$\sphericalangle ESC = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle DSB$$

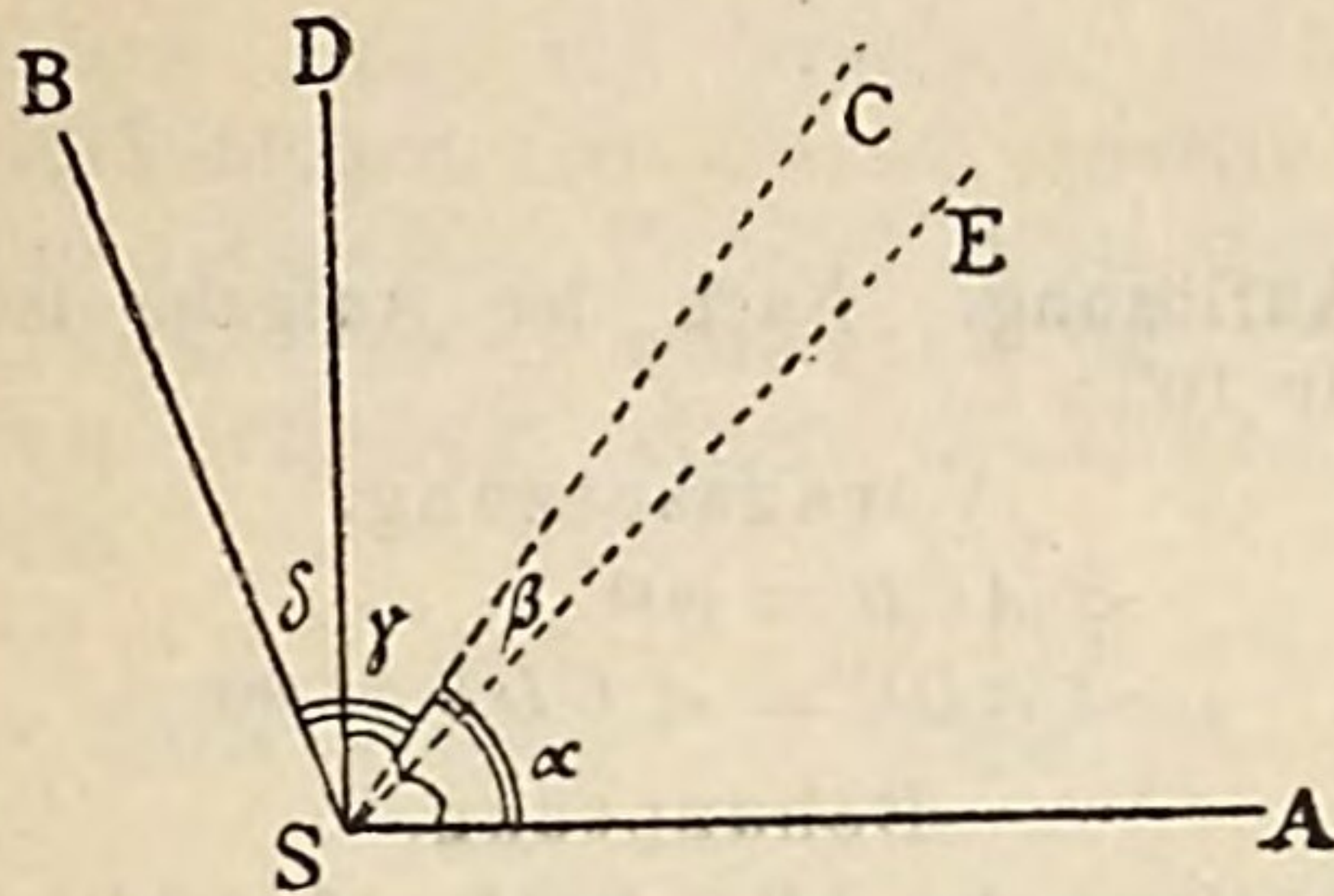
Auflösung. Den Beweis für nebenstehende Behauptung kann man wie folgt führen:

Nach Figur 101 ist:

$$1) \dots \sphericalangle ASC = \alpha + \beta$$

und $\sphericalangle CSB = \gamma + \delta$

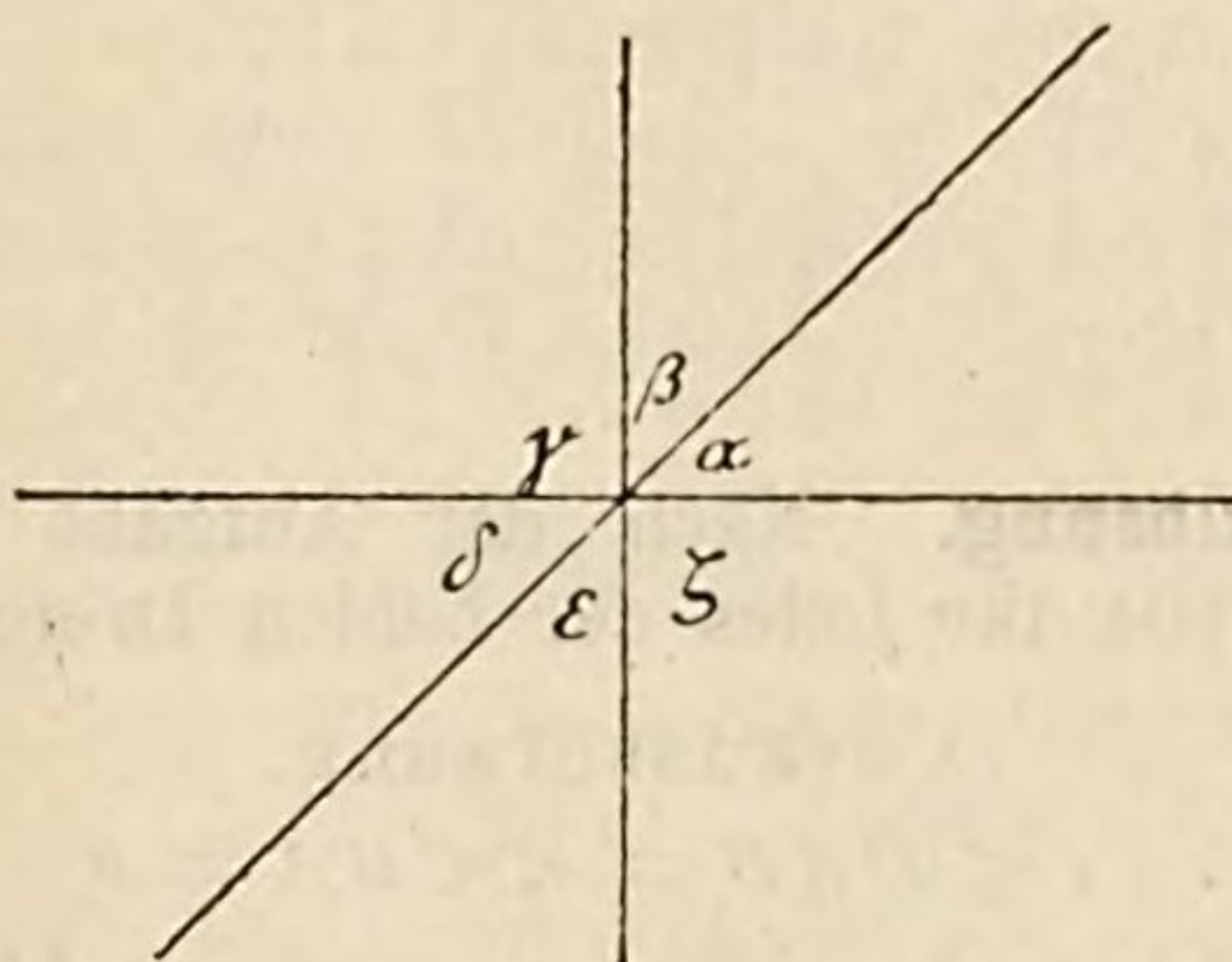
Figur 101.



Erkl. 197. Die Aufgaben 121 bis 126, sowie unten 141 und 142 sind die Uebertragung der in den Aufgaben 45 bis 52 des ersten Theiles dieses Lehrbuches für Strecken ausgesprochenen Behauptungen auf die Lehre vom Winkel. Da die Beweise am obengenannten Orte in genügender Ausführlichkeit nachzuschlagen sind, so wird hier von weiter eingehender Behandlung Abstand genommen und auf die Seiten 85 bis 92 des ersten Theiles verwiesen.

Aufgabe 127. Es soll bewiesen werden, dass von den Winkeln dreier durch denselben Punkt gehenden Geraden je drei nicht aneinander grenzende Winkel in Summe 180° betragen.

Figur 102.



Aufgabe 128. Man soll beweisen, dass in einem Dreieck mit zwei gleich grossen Winkeln $a = b$ der Aussenwinkel an der dritten Ecke doppelt so gross ist als einer der vorigen Winkel (siehe Figur 104).

$$2) \dots \sphericalangle ASE = \alpha$$

und $\sphericalangle ESD = \beta + \gamma$

Also ergibt die Voraussetzung:

$$3) \dots \alpha + \beta = \gamma + \delta$$

$$4) \dots \alpha = \beta + \gamma$$

Durch Subtraktion der Gleichung 4) von Gleichung 3) entsteht:

$$5) \dots \beta = \delta - \beta$$

oder:

$$2\beta = \delta$$

Demnach ist wegen Figur 101:

$$\beta = \frac{1}{2} \delta$$

oder:

$$\sphericalangle ESC = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BSD$$

Auflösung. Nach der Aufgabe ist für die Winkel in Figur 102:

Behauptung.

$$\alpha + \gamma + \epsilon = 2R = \beta + \delta + \zeta$$

Dies lässt sich folgendermassen beweisen:

Beweis.

Von den sechs Winkeln der Figur 103 sind je zwei als Scheitelwinkel einander gleich, nämlich:

$$\alpha = \delta, \quad \beta = \epsilon, \quad \gamma = \zeta$$

Setzt man also in der Summe $\alpha + \gamma + \epsilon$ für α, γ, ϵ der Reihe nach die gleichen Winkelwerte δ, ζ, β ein, so entsteht:

$$\alpha + \beta + \gamma = \delta + \zeta + \beta$$

oder mit Umstellung der Summanden:

$$\alpha + \beta + \gamma = \beta + \delta + \zeta$$

Auflösung. Bezeichnet man den Aussenwinkel an der dritten Ecke mit μ , so folgt aus Lehrsatz 18:

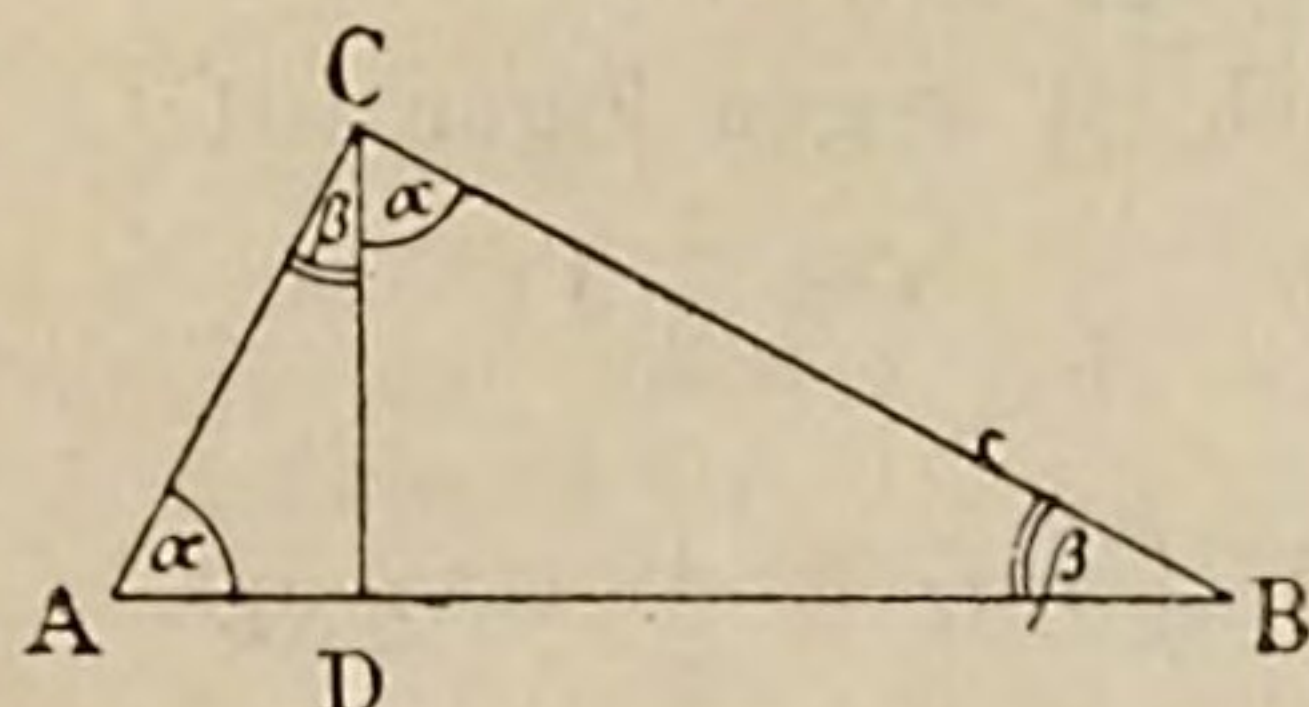
$$\mu = \alpha + \beta$$

Da also nach Voraussetzung $\alpha = \beta$ ist, so wird richtig:

$$\mu = 2\alpha = 2\beta$$

Aufgabe 129. Wird im rechtwinkligen Dreieck vom Scheitel des rechten Winkels aus eine Senkrechte gefällt auf die nicht anliegende Dreiecksseite, so teilt diese das Dreieck in zwei andere, die unter sich und mit dem ganzen Dreieck gleiche Winkel haben.

Figur 103.



Erkl. 198. Die wichtigste Anwendung dieser einfachen Aufgabe findet man bei der Lehre von der Aehnlichkeit im VI. Teil dieses Lehrbuches zum Beweis des sog. Pythagoreischen Lehrsatzes.

Auflösung. Nach der Aufgabe ist in Figur 103:

Voraussetzung.

$$\sphericalangle ACB = 90^\circ$$

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle CDB = 90^\circ$$

Behauptung.

Die Dreiecke ABC , BCD und ACD haben die gleichen drei Winkel.

Beweis.

Da nach Lehrsatz 17 zum Winkel bei A sowohl der Winkel ABC im rechtwinkligen Dreieck ABC , als auch der Winkel ACD im rechtwinkligen Dreieck ACD Komplementwinkel sein müssen, so ist:

$$a) \dots \sphericalangle ABC = 90^\circ - \sphericalangle CAD = \sphericalangle DCA$$

Aus dem gleichen Grunde ist auch $\sphericalangle CAD$ sowohl wie $\sphericalangle BCD$ beide Komplementwinkel zum Winkel bei B in den rechtwinkligen Dreiecken ABC und BCD , also:

$$b) \dots \sphericalangle CAD = 90^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$$

Demnach erhält man für die drei Dreiecke:

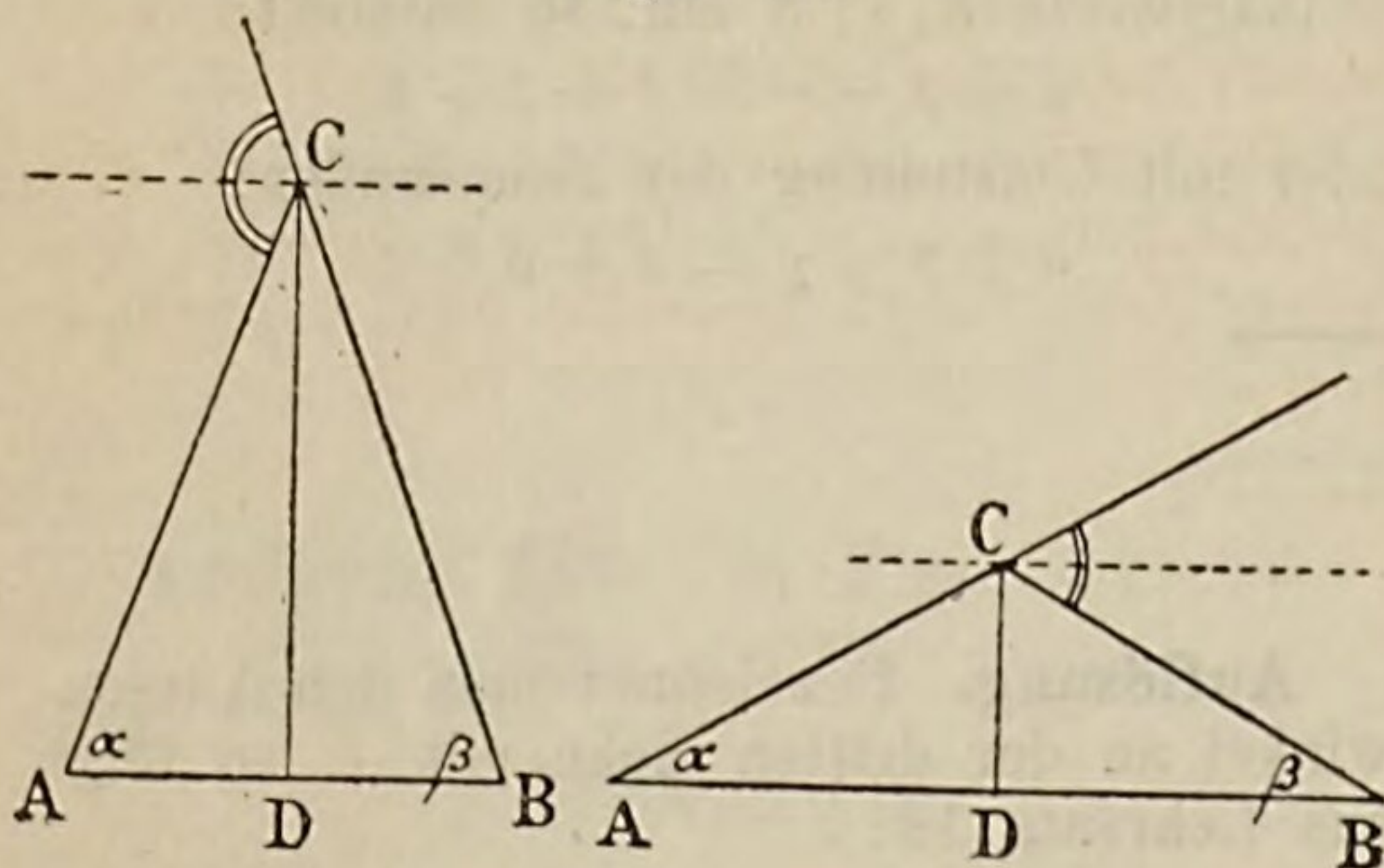
$$1) \sphericalangle ABC = \sphericalangle CBD = \sphericalangle ACD = \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$2) \sphericalangle BCA = \sphericalangle BDC = \sphericalangle CDA = 90^\circ$$

$$3) \sphericalangle CAB = \sphericalangle DCB = \sphericalangle DAC = \alpha = 90^\circ - \beta$$

Aufgabe 130. Wird in einem Dreieck mit zwei gleichen Winkeln der dritte Winkel halbiert, so bildet seine Halbierungslinie einen rechten Winkel mit der von ihr geschnittenen dritten Seite.

Figur 104.



Auflösung. Nach der Aufgabe ist in Figur 104 für jedes der beiden Dreiecke:

Voraussetzung.

$$1) \dots \sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = \alpha$$

$$2) \dots \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD = \sphericalangle \frac{ACB}{2}$$

Behauptung.

$$\sphericalangle CDA = \sphericalangle CDB = 90^\circ$$

Beweis.

Nach der Auflösung der Aufgabe 50 ist:

$$\sphericalangle ACB = 2 \cdot (90^\circ - \alpha)$$

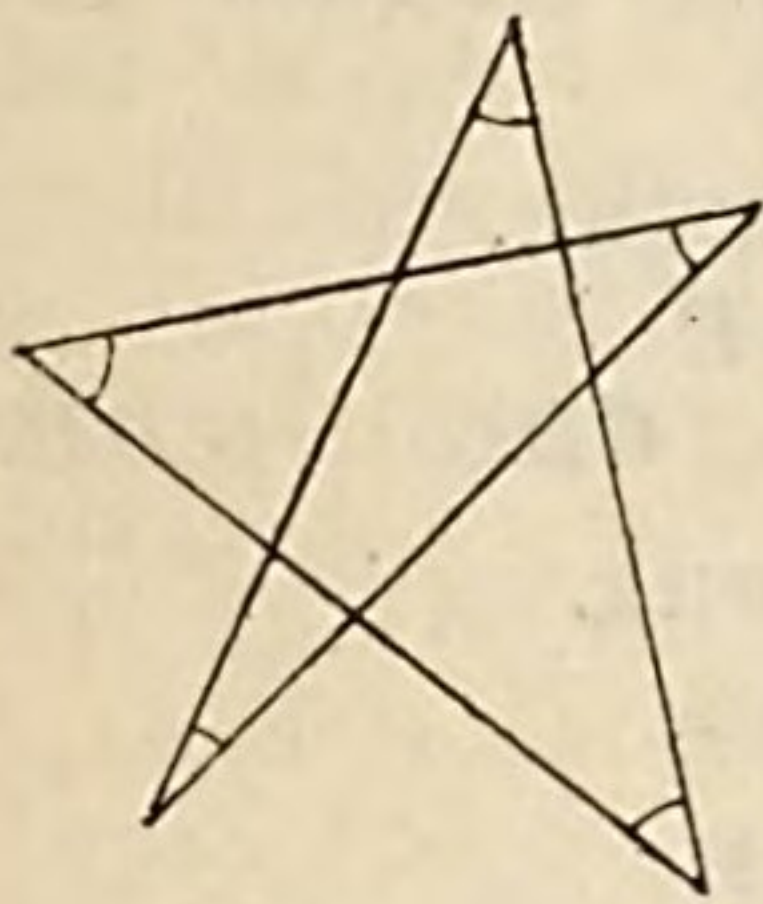
Demnach muss die Hälfte dieses Winkels, nämlich:

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD = 90^\circ - \alpha$$

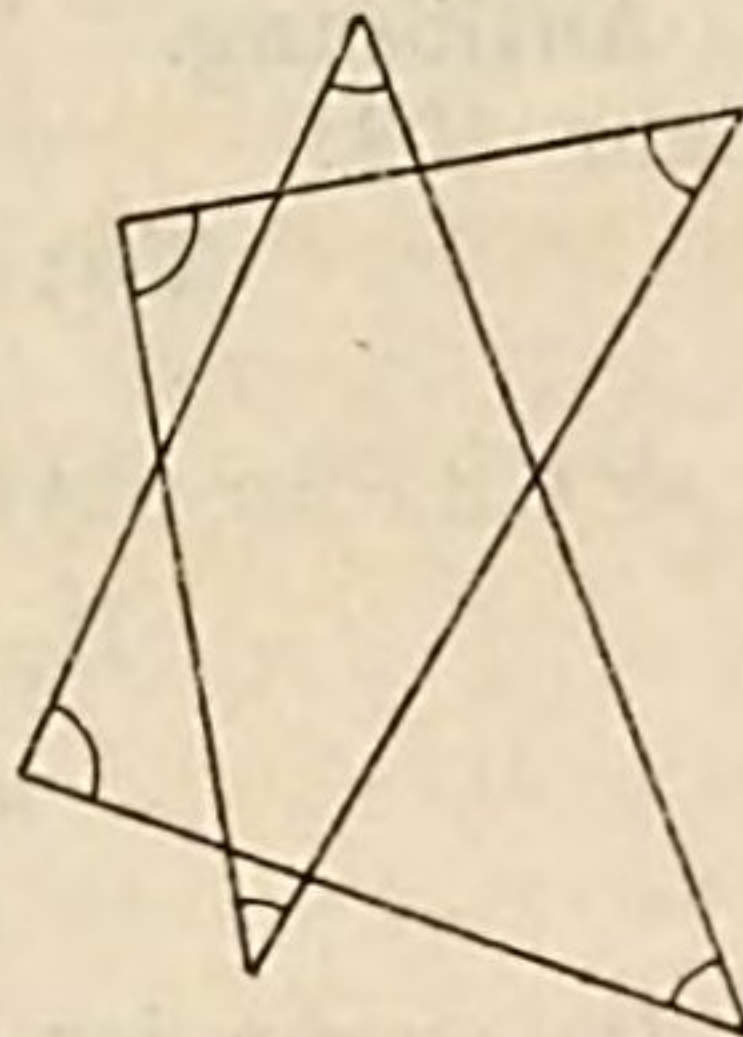
sein. Also ist im Dreieck ACD oder BCD ein Winkel $= \alpha$, ein zweiter Winkel $= 90^\circ - \alpha$, deren Summe also $= 90^\circ$. Demnach muss der dritte Winkel beider Dreiecke selbst ein Rechter sein.

Aufgabe 131. Ein Vieleck, wie in Figur 105 und 106 heisst ein Sternvieleck. Man soll beweisen, dass die Winkelsummen der an den Spitzen der Figur liegenden Winkel beim Sternfünfeck einen gestreckten, beim Sternsechseck einen Vollwinkel bilden.

Figur 105.



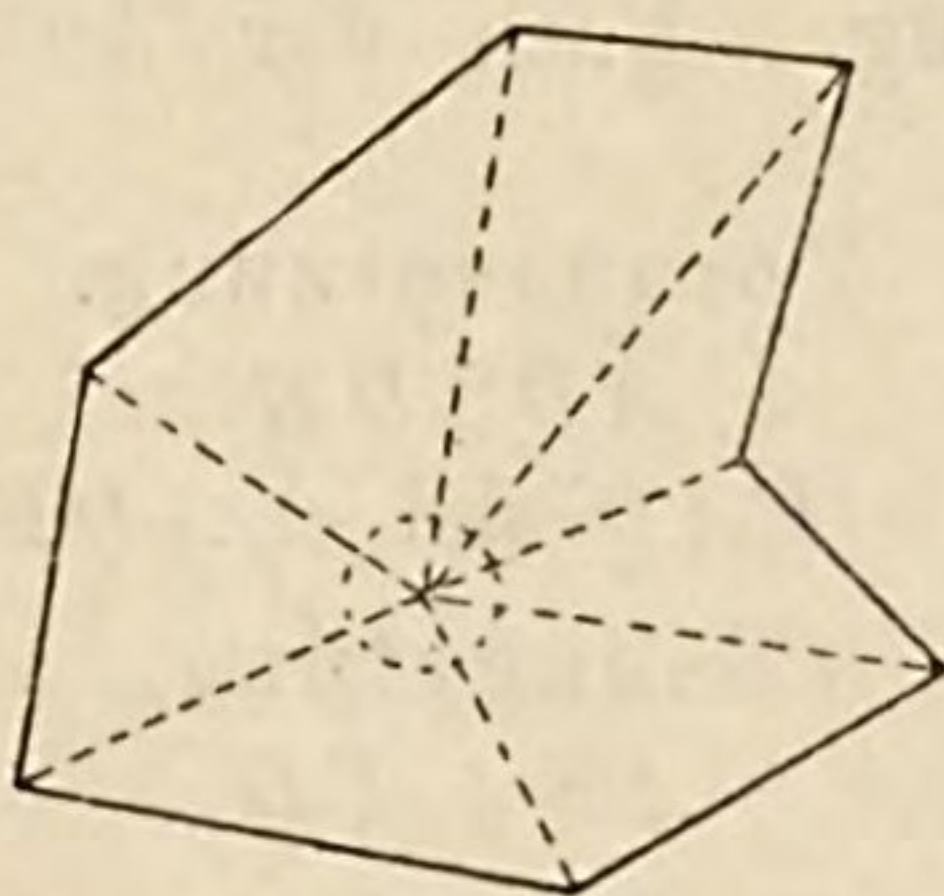
Figur 106.



Erkl. 199. Für das Sternsechseck (von gerader Seitenzahl) ist der Beweis noch einfacher zu führen, da dessen Winkel die Innenwinkel zweier grossen Dreiecke bilden, also schon aus diesem Grunde die Winkelsumme von $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$ liefern müssen.

Aufgabe 132. Man soll den Lehrsatz 13 über die Innenwinkelsumme eines Vielecks beweisen durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittels Verbindungslinien der Ecken mit einem beliebigen Punkte im Innern.

Figur 107.



Aufgabe 133. Hat ein Dreieck zwei gleiche Winkel, so ist die Halbierungslinie des dritten Aussenwinkels parallel zum gemeinschaftlichen Schenkel der beiden ersten Winkel (siehe Figur 104).

Auflösung. Die Winkel an den Spitzen des Sternfünfecks oder Sternsechsecks sind die dritten Winkel von fünf bzw. sechs Dreiecken, deren andere Winkel die Aussenwinkel und deren andere Seiten die Seiten eines gewöhnlichen Fünfecks oder Sechsecks sind. Da die Winkelsumme jedes dieser Dreiecke $= 180^\circ$ ist, so beträgt die Summe der betrachteten Winkel zusammen mit jenen Aussenwinkeln 5 bzw. 6 mal 180° . Auf die Aussenwinkel allein entfällt aber nach Lehrsatz 12 je 360° für jegliche der beiden zusammengehörigen Gruppen. Da hier beiderlei Aussenwinkel zusammentreten in die vorige Summe, so sind davon sowohl beim Sternfünfeck als beim Sternsechseck je zweimal 360° abzuziehen. Demnach bleiben für die Winkelsumme im

Sternfünfeck: $5 \cdot 180^\circ - 2 \cdot 360 = 1 \cdot 180^\circ$

Sternsechseck: $6 \cdot 180^\circ - 2 \cdot 360 = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$

Auflösung. Durch Verbindung der n Ecken des Vielecks mit dem Punkte O im Innern (siehe Figur 107) entstehen n Dreiecke, deren Winkelsumme gebildet wird

1) durch die Summe der Vieleckswinkel,

2) durch die sämtlichen um den Punkt O herum liegenden Winkel.

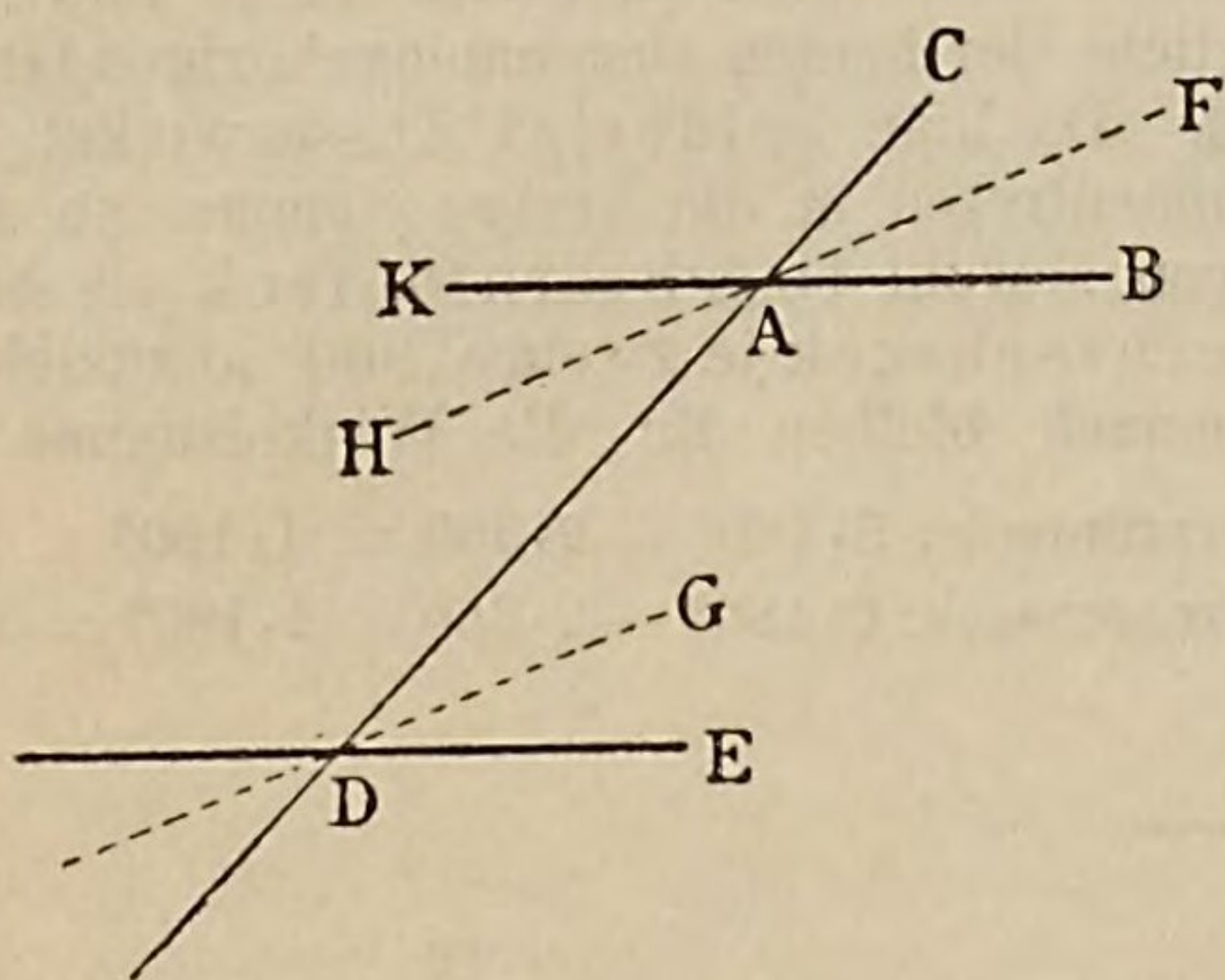
Da letztere zusammen $4 R$ betragen, und die Winkelsumme der n Dreiecke gleich $n \cdot 2 R$ ist, so bleibt für die Vieleckswinkel die Summe $n \cdot 2 R - 4 R = (n - 2) 2 R$ übrig.

Auflösung. Nach Auflösung der Aufgabe 128 ist die Grösse jenes Aussenwinkels $= 2 \cdot \alpha = 2 \cdot \beta$, also beträgt seine Hälfte $= \alpha = \beta$. Die Halbierungslinie bildet

also mit der Dreiecksseite AC oder BC den gleichen Winkel, wie diese selbst mit der dritten Dreiecksseite AB . Da aber diese Winkel Wechselwinkel sind, so muss nach Lehrsatz 23 jene Halbierungslinie parallel AB sein.

Aufgabe 134. Es soll bewiesen werden, dass die Winkelhalbierenden von korrespondierenden oder Wechselwinkeln an einer durch zwei Parallelen gehenden Transversalen ebenfalls parallel sind.

Figur 108.



Auflösung. Nach der Aufgabe ist in Figur 108:

Voraussetzung.

$$AB \parallel DE$$

$$\sphericalangle CAF = FAB \text{ und } \sphericalangle CDG = GDE.$$

Behauptung.

$$HF \parallel DG$$

Beweis.

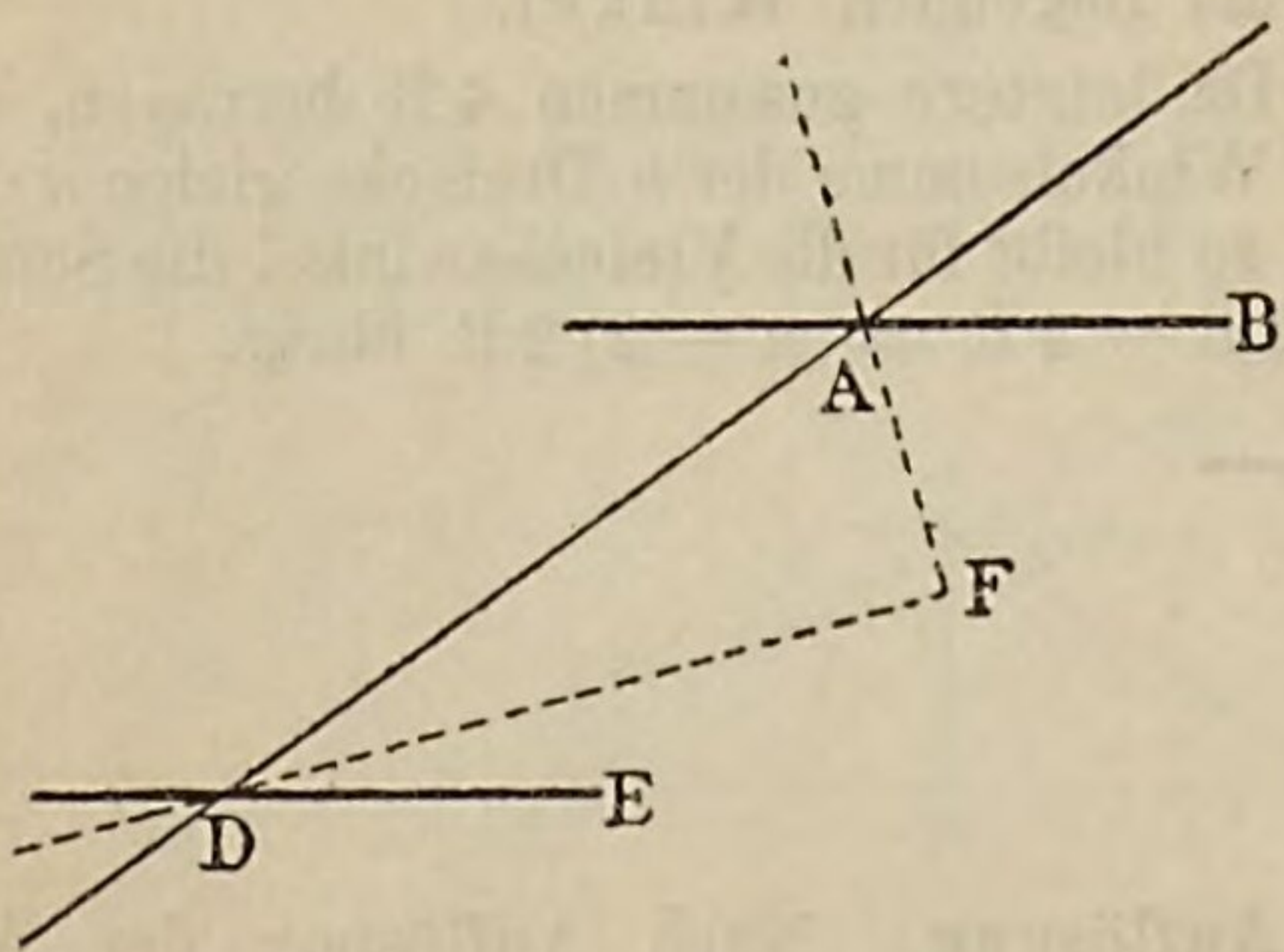
Da wegen der Parallelen $AB \parallel DE$ die korrespondierenden $\sphericalangle CAB = CDE$ und die Wechselwinkel $KAD = ADE$, so sind auch die Hälften dieser gleichen Winkel gleich, nämlich:

$$\sphericalangle FAC = GDC \text{ und } \sphericalangle HAD = ADG$$

Diese halben Winkel sind aber selber wieder korrespondierende bzw. Wechselwinkel, also müssen die sie bildenden Geraden HF und DG nach Lehrsatz 23 parallel sein.

Aufgabe 135. Es soll bewiesen werden, dass die Winkelhalbierenden von entgegengesetzten Winkeln an einer durch zwei Parallelen gehenden Transversalen senkrecht zu einander sind.

Figur 109.



Auflösung. Nach der Aufgabe ist in Figur 109:

Voraussetzung.

$$AB \parallel DE$$

$$\sphericalangle BAF = FAD \text{ und } \sphericalangle ADF = FDE$$

Behauptung.

$$AF \perp FD$$

Beweis.

Die in Punkt F sich schneidenden Halbierungslinien bilden mit der Strecke AD ein Dreieck, dessen Winkel sind:

$$\sphericalangle AFD, \sphericalangle ADF = \frac{\sphericalangle ADE}{2}, \sphericalangle DAF = \frac{\sphericalangle DAB}{2}$$

Da nun wegen der Parallelen $AB \parallel DE$ der entgegengesetzte Winkel:

$$\sphericalangle EDA = 180^\circ - \sphericalangle DAB,$$

so muss:

$$\angle ADF = \frac{\angle EDA}{2} = 90^\circ - \frac{\angle DAB}{2} = 90^\circ - \angle DAF$$

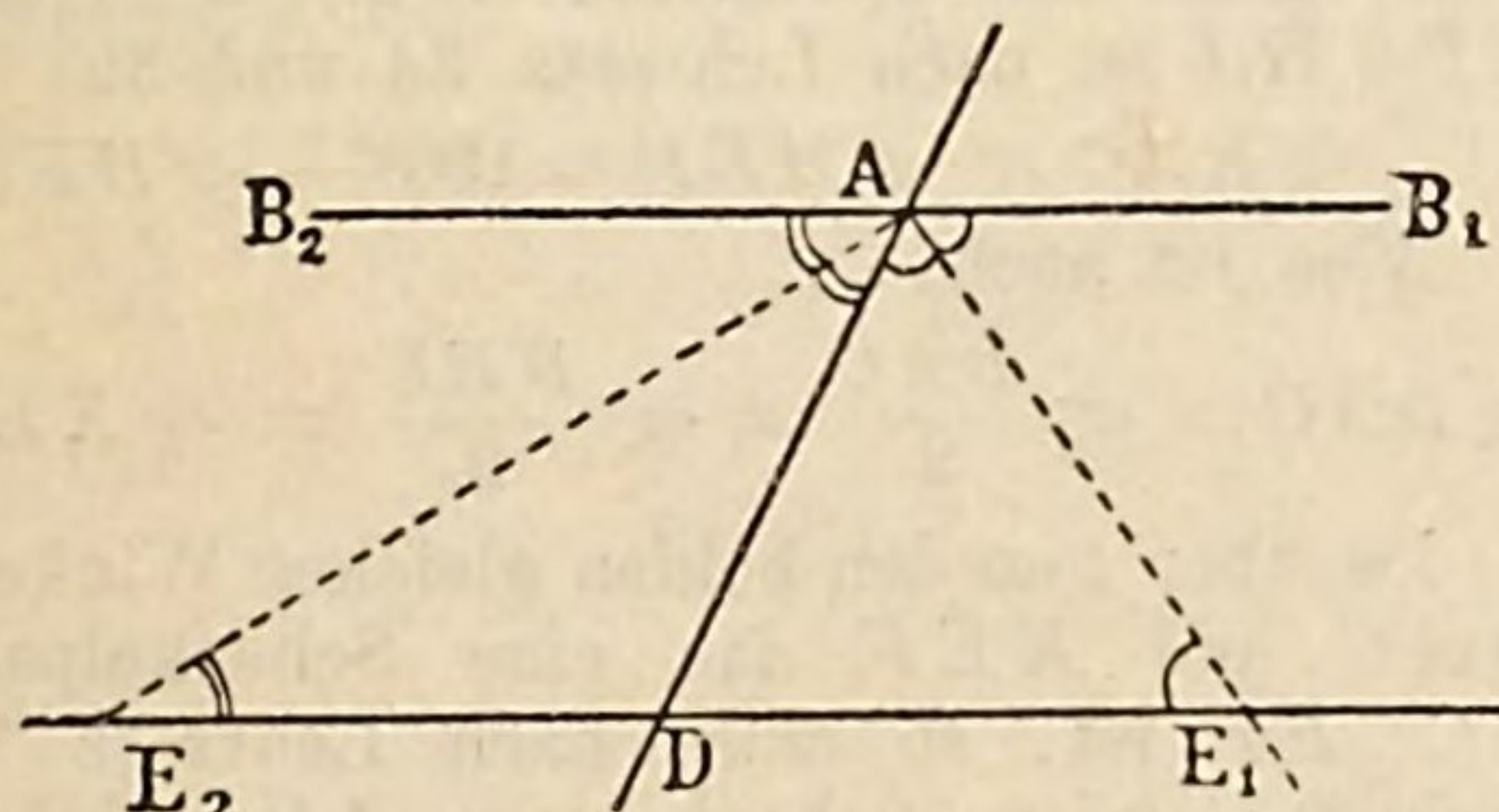
sein. Also ist in dem Dreieck ADF

$$\angle ADF + \angle DAF = 90^\circ$$

so dass für den dritten Winkel bei F die Winkelöffnung 90° betragen muss.

Aufgabe 136. Es soll bewiesen werden, dass die Winkelhalbierende eines Winkels an einer durch zwei Parallelen gehenden Transversalen mit der zweiten Parallelen den gleichen Winkel bildet, wie mit der Transversalen.

Figur 110.



Auflösung. Nach der Aufgabe ist in Figur 110 (1 oder 2):

Voraussetzung.

$$AB \parallel DE$$

$$\angle BAE = \angle DAE$$

Behauptung.

$$\angle DAE = \angle DEA$$

Beweis.

Da nach Voraussetzung $AB \parallel DE$, so müssen auch die Wechselwinkel:

$$BAE = DEA$$

sein. Derselbe Winkel BAE ist aber nach Voraussetzung auch gleich $\angle DAE$, also müssen auch die dritten Grössen unter sich gleich sein, nämlich:

$$\angle DAE = \angle DEA$$

Aufgabe 137. Es soll bewiesen werden, dass in einem gleichwinkligen Vieleck von geradzahlgiger Eckenzahl $2n$ jede Seite parallel ist zur n -ten folgenden Seite.

Auflösung. Den Beweis für die nebenstehende Behauptung kann man führen durch Betrachtung der Aussenwinkel des Vielecks. Da jeder Aussenwinkel eines Vielecks von $2n$ -Ecken die Grösse von $\frac{360^\circ}{2n}$ hat, so hat die das Vieleck erzeugende Linie nach n -maliger Drehung im ganzen $n \cdot \frac{360^\circ}{2n} = 180^\circ$ Drehungsgrösse durchlaufen. Also beträgt der Richtungsunterschied jeder Seite mit der n -ten folgenden oder vorhergehenden 180° , d. h. die Linien sind parallel.

Aufgabe 138. Es soll bewiesen werden, dass die Winkelhalbierenden zweier Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln ebenfalls parallel sind, wenn die Winkelschenkel beide

Aufgabe 142. Man soll beweisen, dass, wenn in Figur 100:

$$\sphericalangle DSB - \sphericalangle DSA = 2 \cdot \sphericalangle DSC$$

ist, dann auch:

$$\sphericalangle ASC = \sphericalangle BSC$$

sein muss.

Andeutung. Die Beweisführung ist analog derjenigen zu Aufgabe 125 nur in umgekehrter Schlussfolge.

Aufgabe 143. Es soll bewiesen werden, dass, wenn durch einen Punkt P eine ungerade Anzahl von n Geraden gezogen wird, dann die Summe von je n nicht aneinander grenzenden Winkel 180° beträgt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 127.

Aufgabe 144. Wird im rechtwinkligen Dreieck einer der spitzen Winkel am Scheitel des rechten Winkels eingetragen 1) an der gleichen Dreiecksseite, 2) an der andern Dreiecksseite, so teilt die entstehende Teilungslinie das rechtwinklige Dreieck in zwei andere, welche 1) im ersten Falle je zwei gleiche Winkel haben, 2) im zweiten Falle unter sich und mit dem ganzen Dreieck drei einzeln gleiche Winkel haben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgaben ist analog der Auflösung der Aufgabe 129.

Aufgabe 145. Wird in einem Dreieck mit zwei gleichen Winkeln vom Scheitel des dritten Winkels eine Senkrechte gefällt auf die nicht anliegende Dreiecksseite, so halbiert diese Senkrechte den dritten Winkel.

Aufgabe 146. Jede Senkrechte auf der Halbierungslinie eines Winkels bildet mit den beiden Schenkeln dieses Winkels gleichgrosse Winkel.

Aufgabe 147. Bei einem Dreieck mit zwei gleichen Winkeln übertrifft der Nebenwinkel eines solchen die Hälfte des dritten Dreieckswinkels um 90° oder 1 R.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgaben ist analog der Auflösung der Aufgabe 130.

Aufgabe 148. Man beweise, dass die Summe der „Spitzen-Winkel“ beim Sternsiebeneck 6 rechte Winkel beträgt, allgemein beim Sternvieleck von n Ecken $(n-4)$ gestreckte Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 131.

Aufgabe 149. Man soll den Lehrsatz 13 über die Innenwinkelsumme eines Vielecks beweisen durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittels Verbindungslinien aller Ecken mit einer einzelnen unter ihnen selbst.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 132, indem man beim n Eck $n - 2$ Dreiecke von je 180° Winkelsumme erhält.

Aufgabe 150. Wird in einem Dreieck mit zwei gleichen Winkeln durch den Scheitelpunkt des dritten Winkels eine Parallele gezogen zum gemeinschaftlichen Schenkel der beiden gleichen Winkel, so ist diese Parallele 1) Winkelhalbierende des Aussenwinkels an ihrer Ecke, 2) senkrecht zur Winkelhalbierenden des dritten Dreieckswinkels.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 133.

Aufgabe 151. Wenn die Winkelhalbierenden zweier gleichgrossen Winkel parallel sind, so sind auch die Schenkel jener Winkel parallel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 138.

Aufgabe 152. Sind bei den Winkeln zweier Geraden mit einer dritten die Halbierungslinien zweier korrespondierenden Winkel oder zweier Wechselwinkel parallel oder die Halbierungslinien zweier entgegengesetzten Winkel senkrecht, so sind die beiden geschnittenen Geraden parallel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 134 und 135.

Aufgabe 153. Zieht man von einem beliebigen Punkt der Halbierungslinie eines Winkels eine Parallele zu einem der Schenkel, so bildet diese mit der Winkelhalbierenden und dem andern Schenkel ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 136, wobei in Figur 110 die Linie ED die durch den Punkt E der Winkelhalbierenden des Winkels BAD gezogene Parallele zum andern Winkelschenkel BA darstellt.

Aufgabe 154. Man soll die Beweisführung der Aufgaben 138, 139 und 140 in derselben Weise durchführen, wie der Beweis für Lehrsatz 37 gemacht wurde.

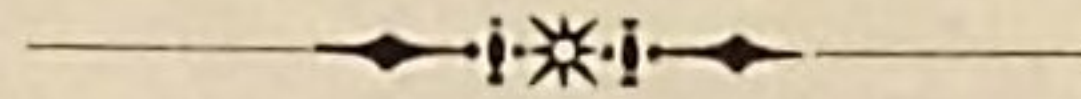
Andeutung. Der Beweis wird dadurch erbracht, dass zu allen in der Figur (also hier in Figur 111, 112 und 113) enthaltenen Linien durch einen beliebigen Punkt der Zeichnungsebene parallele Geraden gezogen werden und die entstehenden gleichen Winkel untersucht werden.

Aufgabe 155. Man soll die Aufgaben 139 und 140 für den besonderen Fall durchführen, dass:

1) der Winkel A ein stumpfer ist, oder dass:

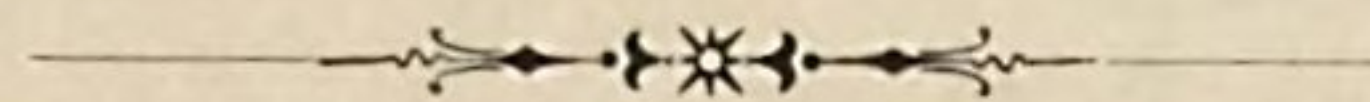
2) der Punkt D bzw. P auf einem der beiden Winkelschenkel AB oder AC selber liegt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 139 und 140, indem für stumpfe Winkel andere Verlängerungen der Winkelschenkel eintreten, und durch die zweite Annahme die Figur und damit der Beweis noch mehrfache Vereinfachung erfährt.



Das griechische Alphabet.

A	α	$\alpha\lambda\phi\alpha$	alpha	a
B	β	$\beta\eta\tau\alpha$	beta	b
Γ	γ	$\gamma\alpha\mu\mu\alpha$	gamma	g
Δ	δ	$\delta\epsilon\lambda\tau\alpha$	delta	d
E	ϵ	$\epsilon\ \psi\iota\lambda\omicron\nu$	epsilon	ē (kurz)
Z	ζ	$\zeta\eta\tau\alpha$	zeta	z
H	η	$\eta\tau\alpha$	eta	ē (lang)
Θ	θ	$\theta\eta\tau\alpha$	theta	th
I	ι	$\iota\omicron\tau\alpha$	iota	i
K	κ	$\kappa\alpha\pi\pi\alpha$	kappa	k
Λ	λ	$\lambda\alpha\mu\beta\delta\alpha$	lambda	l
M	μ	$\mu\nu$	my	m
N	ν	$\nu\nu$	ny	n
Ξ	ξ	$\xi\iota$	xi	x
O	$\omicron$	$\omicron\ \mu\iota\kappa\rho\nu$	omikron	ō (kurz)
Π	π	$\pi\iota$	pi	p
P	ρ	$\rho\omicron$	rho	r
Σ	σ, ς	$\sigma\iota\gamma\mu\alpha$	sigma	s
T	τ	$\tau\alpha\nu$	tau	t
Y	υ	$\upsilon\ \psi\iota\lambda\omicron\nu$	ypsilon	y
Φ	ϕ	$\phi\iota$	phi	ph
X	χ	$\chi\iota$	chi	ch
Ψ	ψ	$\psi\iota$	psi	ps
Ω	ω	$\omega\ \mu\epsilon\gamma\alpha$	omega	ō (lang)



Anhang.

Ergebnisse der ungelösten Aufgaben.

57. 3216'
 58. 4379''
 59. 507613''
 60. a) 17,495° b) 1049,7'
 61. 72° 5' 15''

62. $\frac{1}{16} R = 5^{\circ} 37' 30''$
 $\frac{1}{32} R = 2^{\circ} 48' 45''$
 $\frac{1}{48} R = 1^{\circ} 52' 30''$
 $\frac{1}{80} R = 1^{\circ} 7' 30''$
 $\frac{1}{81} R = 1^{\circ} 6' 40''$

63. 100° 19' 32''

64. 6° 15' 9,4''

65. $\frac{360}{7} = 51^{\circ} 25' 42 \frac{6}{7}''$
 $\frac{360}{11} = 32^{\circ} 43' 38 \frac{2}{11}''$
 $\frac{360}{13} = 27^{\circ} 41' 32 \frac{4}{13}''$

	15	18	20	24-Eck
66. I.-W.	156°	160°	162°	165°
A.-W.	24°	20°	18°	15°

67. $\alpha = 24^{\circ}$, $\beta = 48^{\circ}$, $\gamma = 96^{\circ}$, $\delta = 192^{\circ}$

68. $505^{\circ} 7' 23,8'' = 4 R + 145^{\circ} 7' 23,8''$

69. 57° 54' 6''

70. 17

71. 33° 45', 8° 45', 7° 15'

$7 \frac{1}{2}$, $2 \frac{1}{2}$, $5 \frac{1}{12}$ Zeitminuten

20, 50 Zeitminuten

72. $180 - \alpha = 136^{\circ} 31' 3''$, $90 - \alpha = 46^{\circ} 31' 3''$
 $160 - \beta = 92^{\circ} 6' 58''$, $90 - \beta = 2^{\circ} 6' 58''$

73. Es ergeben sich 23 verschiedene Fälle, nämlich nach der Bezeichnungsweise bei Figur 65:

2102	1301	0500
2012	1211	0410
2003	1202	0401
	1121	0320
	1112	0311
	1103	0302
	1031	0230
	1022	0221
	1013	0212
	1004	0203

74. 60, 360

75. 21, 28

76. 1) $\gamma = 43^{\circ} 59' 10''$

2) $\beta = 69^{\circ} 59' 42''$, $\gamma = 34^{\circ} 59' 51''$

3) $\gamma = 73^{\circ} 59' 22''$

4) $\beta = \gamma = 52^{\circ} 48' 0,5''$

77. 143° 52' 4''

113. $\alpha = \sigma - \beta$, $\alpha = \beta \pm \delta$

114. $\gamma = 90^{\circ} = R$, $\alpha = \beta = 45^{\circ} = \frac{R}{2}$

115. $\gamma = 90^{\circ}$, $\alpha = 60^{\circ}$, $\beta = 30^{\circ}$

116. $\alpha = \beta = \frac{180 - \gamma}{2} = 90 - \frac{\gamma}{2}$

117. $\gamma = 180^{\circ} - 2\alpha$

118. $\gamma = \delta = \frac{360 - \alpha - \beta}{2} = 180 - \frac{\alpha + \beta}{2}$

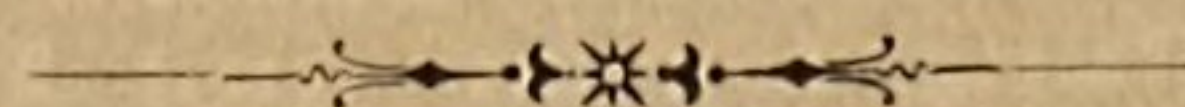
143. Scheitelwinkel $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2 \dots$

Also:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 + \gamma_1 + \varepsilon_1 \dots + \beta_2 + \delta_2 + \zeta_2 + \dots \\ & = \beta_1 + \delta_1 + \zeta_1 \dots + \alpha_2 + \gamma_2 + \varepsilon_2 + \dots \\ & = \frac{360^{\circ}}{2} = 180^{\circ} \end{aligned}$$

148. $7 \cdot 180^{\circ} - 2 \cdot 360^{\circ} = 3 \cdot 180^{\circ} = 6 R$

$$\begin{aligned} n \cdot 180^{\circ} - 2 \cdot 360^{\circ} &= (n - 4) 180^{\circ} \\ &= (n - 4) \cdot 2 R \end{aligned}$$



Verlag von L. v. Vangerow, Bremerhaven und Leipzig.



Verzeichnis
der bisher erschienenen Bände



von

Kleyers Encyklopädie

der gesamten

mathematischen technischen und exakten Natur-Wissenschaften.
Herausgegeben unter Mitwirkung bewährter Fachmänner.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M., St. Louis, Athen.

Wer niedere und höhere Mathematik, z. B.: bürgerliches und kaufmännisches Rechnen, Buchstabenrechnung, Gleichungen 1. 2. 3. und 4. Grades mit einer und mehreren Unbekannten, Differential- und Integralrechnung etc., Planimetrie, Stereometrie, analytische Geometrie, Projektionszeichnen (darstellende Geometrie), ebene und sphärische Trigonometrie, Goniometrie (Winkelmessungslehre), Vermessungskunde (Geodäsie), Astronomie, Physik, Mechanik, Geostatik, Geodynamik, Hydrostatik, Hydrodynamik, Elektrizität, Chemie und deren Hilfswissenschaften studieren, oder wer, in der Praxis stehend, in diesen Fächern sich weiterbilden oder seine Kenntnisse auffrischen will, erhält durch

Kleyers Encyklopädie der gesamten
mathematischen, technischen und
exakten Natur-Wissenschaften : : :

mit ca. 10,000 in den Text gedruckten Figuren,
herausgegeben unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner,

eine auch auf die praktischen Bedürfnisse des Technikers Rücksicht nehmende Auswahl von leichtverständlichen Lehrbüchern, die sowohl dem Studierenden, dem Fachlehrer, als dem ausübenden Techniker ein wohl vorbereitetes Material zum Studium und zum Nachschlagen darbieten; besonders wertvoll erscheinen dieselben dadurch, dass durch sie die Befähigung zur Lösung mathematischer und technischer Probleme ausserordentlich gefördert wird.

Jeder Band ist einzeln käuflich, und zu beziehen durch jede Buchhandlung des In- und Auslandes.

P. P.

Hiermit beehre ich mich, Ihnen das neueste Verzeichnis von:
**Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen,
technischen und exakten Natur-Wissenschaften**
zu überreichen.

Aus der überaus großen Zahl der anerkennendsten Besprechungen, welche in Schul-, technischen und Tagesblättern erschienen und von welchen eine kleine Anzahl dem Kataloge beigegeben sind, bringe ich besonders den folgenden Ausspruch des „Pf. Courier“ zum Abdruck:

„In einzig dastehender Weise werden hier die mathematischen und die damit verwandten technischen und exakten Natur-Wissenschaften in ihrem ganzen Umfang von den elementarsten Regeln der Arithmetik bis zu dem stolzen Gebäude der höheren Mathematik behandelt. Das Werk dient gleichmässig den Zwecken des Schulunterrichts, wie denjenigen des Selbststudiums. Es enthält nicht nur die sonst in jedem Lehrbuch vorkommenden Definitionen, Lehrsätze, Formeln usw., sondern auch ausser vielen ungelösten Aufgaben eine Reihe Aufgabenlösungen, die in Bezug auf die Exaktheit und Sauberkeit der Darstellung unübertroffen dastehen, daneben häufig historische Exkursionen. Wer an der Hand dieser Lehrmittel von Stufe zu Stufe fortschreitend die mathematischen Disziplinen durcharbeitet, wird unstreitig schöne Erfolge erzielen, und die oft verhängnisvolle Ansicht, dass es zum Betrieb der trockenen Mathematik besonderer Talente bedürfe, wird dann von manchem als unzutreffend aufgegeben werden müssen.“

Die Lehrbücher der Kleyerschen Encyklopädie eignen sich ganz besonders zur Unterstützung des Unterrichts und Vortrags an den verschiedensten Lehranstalten, zum Selbststudium, zur Forthilfe bei Schularbeiten, zur Repetition, zur Vorbereitung für Examina und zum Nachschlagen für Fachleute, da bei den ausführlichen Lösungen gut gewählter Aufgaben, welche alle Teile dieser Encyklopädie enthalten, überall die Anwendungen der Gesetze, der Sätze, Regeln, Formeln etc. gezeigt werden.

Jährlich erscheinen von diesem Werke eine Anzahl neuer Bände, und sowohl die beteiligten Autoren, als auch die Verlagsbuchhandlung lassen es sich angelegen sein, den Ausbau des grossen Unternehmens nach Möglichkeit zu fördern.

Hochachtungsvoll

Bremerhaven.

L. v. Vangerow, Verlagsbuchhandlung.

I. Mathematik.

(Grundrechnungsarten, Algebra, Geometrie, Stereometrie, Astronomie, Nautik).

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Erstes Buch: Das Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen. Mit 71 Erkl. und einer Sammlung von 657 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von A. Frömter. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Zweites Buch: Das Rechnen mit benannten Zahlen. Mit 30 Erklärungen und einer Sammlung von 518 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Frömter und Neubüser. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Drittes Buch: Das Rechnen mit unbenannten gebrochenen Zahlen. (Die gemeinen Brüche und die Dezimalbrüche.) Mit 260 Erklärungen und einer Sammlung von 309 gelösten und ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von J. G. Maier. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrößen (Elemente der Buchstabenrechnung), der Verhältnisse und Proportionen. Erster Teil: Mit einer Sammlung von 478 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von Prof. H. Staudacher. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrößen. Zweiter Teil: Elemente der Zahlenlehre. Dezimal- und Kettenbrüche und Rechnung mit unvollständigen Zahlen. Mit einer Sammlung von 277 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von Prof. Hans Staudacher. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Erster Teil: Die Schluss- und Kettenrechnung (die einfache und zusammengesetzte Regel detri und der Reesische Satz) nebst Anwendungen. Mit 100 Fragen, 325 Erklärungen, 63 Anmerkungen, 1250 Aufgaben, 18 Figuren, den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben und einer Münz-, Mass- und Gewichtstabelle. Zum Selbststudium, Nachschlagen, sowie zum Schulgebrauch bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Richard Olbricht. Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Zweiter Teil: Die Prozent- und Zinsrechnung nebst ihren Anwendungen, mit Einschluss der Diskontrechnung, der Terminrechnung, der Kalkulationen und Kontokorrente. Mit 130 Fragen, 444 Erklärungen, 27 Anmerkungen, 1520 Aufgaben, zahlreichen schematischen Figuren, einem Formelverzeichnis, einer Fristen- und Zinsenberechnungstabelle, sowie den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben. Bearbeitet von Dr. R. Olbricht. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung nebst einer Sammlung von 525 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben aus allen Zweigen des Berufslebens. Von Ad. Kleyer. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

- Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln** nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Adolf Kleyer**. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten.** Sammlung von 2381 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grösstenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 230 Erklärungen und 26 in den Text gedruckte Figuren. Von **Ad. Kleyer**. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.
- Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit mehreren Unbekannten.** Sammlung von 905 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 403 Erklärungen und Anmerkungen. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Von **Otto Prange**. Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.
- Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des 1. Grades.** (Diophantische Gleichungen.) Sammlung von 374 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben in vollständig gelöster Form und zahlreichen Erklärungen und Erläuterungen. Nebst den Abhandlungen des **Bachez de Méziriac**, im französischen Originale mit beigefügter deutscher Übersetzung. Bearbeitet zum Teil nach **System Kleyer** von **W. Fr. Schüler**. Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.
- Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten** (Quadratische Gleichungen). Sammlung von 1650 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 872 Erklärungen und 53 Figuren. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Von **Dr. Aug. Blind**. Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.
- Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit zwei und mehreren Unbekannten.** (Quadratische Gleichungen.) Sammlung von 361 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 185 Erklärungen und 8 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Conrad Metger**. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.
- Lehrbuch der Gleichungen 3. und 4. Grades, nebst der trigonometrischen Auflösung der Gleichungen 2. Grades.** Sammlung von 253 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 251 Erklärungen und 10 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Conrad Metger**. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch der Körperberechnungen.** Erstes Buch: Mit vielen gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 184 Figuren. Zweite Auflage. Von **Ad. Kleyer**. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.
- Lehrbuch der Körperberechnungen.** Zweites Buch: Eine Sammlung von 772 vollständig gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 742 Erklärungen und 256 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer**. Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.
- Lehrbuch der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.** Mit 52 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 29 Erklärungen und 17 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. K. J. Bobek**. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.
- Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Mit 303 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 68 Erklärungen und 27 in den Text gedruckten Figuren. Von **Dr. K. J. Bobek**. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen, der zusammengesetzten-, harmonischen-, Ketten- und Teilbruchreihen, nebst einer Sammlung von über 400 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von Ad. Kleyer. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der Kombinatorik. Ausführliche Darstellung der Lehre von den kombinatorischen Operationen. (Permutieren, Kombinieren, Variieren). Mit 506 gelösten und analogen ungelösten Übungsbeispielen nebst den Resultaten der letzteren. Von Prof. H. Staudacher. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Logarithmen nebst einer Sammlung von 1996 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von Ad. Kleyer. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Fünfstellige korrekte Logarithmentafeln nebst einer trigonometrischen Tafel und einer Anzahl von anderen Tabellen. Von Ad. Kleyer. Preis: in einfachem Leineneinband Mk. 2.50.

Vierstellige logarithmische Tafeln der natürlichen und trigonometrischen Zahlen nebst den erforderlichen Hilfstabellen. Für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis bearbeitet von E. R. Müller. Preis: kartonniert 60 Pfg.

Lehrbuch der Integralrechnung. Erster Teil: Mit einer Sammlung von 592 gelösten Aufgaben. Für das Selbststudium, zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Nachschlagen von Integrationsformeln und -Regeln. Bearbeitet nach eigenem System und im Anschluss an das Lehrbuch der Differentialrechnung. Von Ad. Kleyer. Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der Integralrechnung. Zweiter Teil: Anwendung der bestimmten Integrale auf Quadratur, Rektifikation, Komplanation und Kubatur, sowie auf zahlreiche gelöste praktische Aufgaben aus der **Mechanik und Technik**. Mit 245 vollständig gelösten Aufgaben, 163 Figuren und 137 Erklärungen, nebst ausführlichem Formelverzeichnis. Zum Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet von Prof. Dr. Haas. Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Erster Teil: Die einfache und wiederholte Differentiation explizierter Funktionen von einer unabhängigen Variablen. Ohne Anwendung der Grenzen und der Nullen-Theorie und ohne Vernachlässigung von Grössen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben und Formelverzeichnis. Zweite Auflage. Von Ad. Kleyer. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Zweiter Teil: Die vollständige Differentiation entwickelter und nicht entwickelter Funktionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen. Reihenentwickelungen, unbestimmte Formen, Maxima und Minima. Nebst 352 gelösten Aufgaben, 78 Figuren, 230 Erklärungen und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von Prof. Dr. Haas. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Dritter Teil: Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven. Nebst 425 gelösten Aufgaben, 164 Figuren, 138 Erklärungen und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von Prof. Dr. Haas. Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen. Mit 221 Erklärungen und 38 in den Text gedruckten Figuren. Mit einer Sammlung von 269 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach System Kleyer von Richard Krüger. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Einführung in die Funktionentheorie. Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Mit 23 Figuren. Von Dr. W. Láska. Preis: Mk. 1.50. In einfachem Leinenband Mk. 2.—.

Lehrbuch der angewandten Potentialtheorie. Mit 588 Erklärungen und 47 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung von erläuternden Beispielen und Übungsaufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. H. Hovestadt. Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen. Erster Teil: Mit einer Sammlung von 460 gelösten und ungelösten Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren, nebst 226 Erklärungen. Bearbeitet nach System Kleyer. Von Dr. G. Weichold. Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Erster Teil: Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 234 Erklärungen und 109 in den Text gedruckten Figuren. Von Ad. Kleyer. Preis: Mk. 1.80. Geb. nur mit Teil II zus. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Zweiter Teil: Der Winkel und die parallelen Linien. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 201 Erklärungen und 113 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer. Von Dr. J. Sachs. Preis: Mk. 2.20. Geb. nur mit Teil I zus. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Dritter Teil: Die geometrischen Gebilde und ihre Lagen-Veränderungen. Die einfachen Vielecke. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 737 Erklärungen und 343 Figuren. Bearbeitet von Prof. Dr. J. Sachs. Preis Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie)). Vierter Teil: Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Örter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 529 Erklärungen und 230 Figuren. Von Prof. Dr. J. Sachs. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Fünfter Teil: Die Flächen der geradlinigen Figuren. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 346 Erklärungen und 96 in den Text gedruckten Figuren. Von Prof. Dr. J. Sachs. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Sechster Teil: Proportionalität der Strecken. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 378 Erklärungen und 90 Figuren. Von Prof. Dr. J. Sachs. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Siebenter Teil: Die Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 394 Erklärungen und 76 in den Text gedruckten Figuren. Von Prof. Dr. J. Sachs. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

- Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie).** A c h t e r T e i l : Die Anwendung der Ähnlichkeit auf die Lehre vom Kreis. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 505 Erklärungen und 135 Figuren. Von Prof. Dr. J. Sachs. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.
- Tabelle der Elemente der regelmässigen Vielecke.** Von Prof. Dr. J. Sachs. Preis: Mk. —.50.
- Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie).** E r s t e r T e i l : Die Lage von geraden Linien und Ebenen im Raum. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 573 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. H. Seipp. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis.** E r s t e r T e i l : Aufgaben, gelöst ohne Anwendung der Proportionenlehre. Mit 1952 gelösten und ungelösten Aufgaben, 178 Anmerkungen, 207 Erklärungen und 214 in den Text gedruckten Figuren. Von E. R. Müller. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.
- Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis.** Z w e i t e r T e i l : Aufgaben, gelöst mit Anwendung der Proportionenlehre. Mit 1327 gelösten und ungelösten Aufgaben, 126 Anmerkungen, 100 Erklärungen und 174 Figuren. Bearbeitet von E. R. Müller. Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.
- Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis.** D r i t t e r T e i l : Verwandlungs- und Teilungsaufgaben, sowie Aufgaben über ein- und umbeschriebene Figuren. Mit 510 gelösten und ungelösten Aufgaben, 40 Anmerkungen, 72 Erklärungen und 54 Figuren. Bearbeitet von Prof. E. R. Müller. Preis: Mk. 2.—. Geb. Mk. 3.—.
- Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene.** E r s t e r T e i l : Analytische Geometrie des Punktes und der Geraden. Mit einer Sammlung von 100 Aufgaben, 206 gelösten Übungsaufgaben und 92 in den Text gedruckten Figuren. Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Heinr. Cranz. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene.** Z w e i t e r T e i l : Analytische Geometrie der einzelnen Linien zweiten Grades. Mit einer Sammlung von 116 Aufgaben, 286 gelösten Übungsaufgaben und 200 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Heinr. Cranz. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.
- Lehrbuch der Vermessungskunde (Geodäsie).** Mit einer Sammlung von 153 gelösten Aufgaben und angewandten Beispielen, zahlreichen Erklärungen und 481 in den Text gedruckten Figuren. Unter Berücksichtigung des Selbstunterrichts für Geometer-Eleven, Studierende des Bau-, Berg- und Ingenieur-Faches, sowie zum praktischen Gebrauch für Feldmesser, Kulturtechniker, Katasterbeamte usw. Von Dr. W. Láska. Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.
- Das apollonische Berührungsproblem und verwandte Aufgaben.** Sammlung von 163 gelösten und ungelösten Aufgaben und 200 Figuren. Zur Ergänzung des Schulunterrichts und zum Selbststudium. Nach System Kleyer durchaus neu bearbeitet. Zweite Auflage. Von Prof. Heinr. Cranz. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Geschichte der Geometrie für Freunde der Mathematik gemeinverständlich dargestellt von **Richard Klimpert**. Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Eine Sammlung von 1049 gelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben und 178 ungelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben aus der angewandten Mathematik. Mit 797 Erklärungen, 563 in den Text gedruckten Figuren und 65 Anmerkungen nebst einem ausführlichen Formelverzeichnis von über 500 Formeln. Von **Ad. Kleyer**. Preis: Mk. 18.—. Geb. Mk. 19.50.

Lehrbuch der Goniometrie (Winkelmessungslehre) mit 307 Erklärungen und 52 Figuren nebst einer Sammlung von 513 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer**. Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). **Erster Teil: Elemente und Grundgebilde. Projektivität. Dualität.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren. Mit 261 Erklärungen und 97 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). **Zweiter Teil: Harmonische Gebilde. Entstehung der Kegelschnitte. Sätze von Pascal und Brianchon.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren. Mit 445 Erklärungen und 135 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). **Dritter Teil: Pol und Polare. Mittelpunktseigenschaften. Involution. Brennpunkteigenschaften der Kurven zweiten Grades.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 550 Erklärungen und 172 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen. Mit 259 Fragen und Antworten, 199 Erklärungen, 502 meist gelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. A. Haas**. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). **Erster Teil: Die rechtwinklige Projektion auf eine und mehrere Projektionsebenen.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 271 Erklärungen und 226 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn**. Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). **Zweiter Teil: Über die rechtwinklige Projektion ebenflächiger Körper.** Mit 130 Erklärungen und 99 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn**. Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

- Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Dritter Teil: Erste Hälfte: Schiefe Parallelprojektion, Centralprojektion einschliesslich der Elemente der projektiven Geometrie. Mit 195 Erklärungen und 169 Figuren. Bearbeitet von J. Vonderlinn. Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.
- Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Dritter Teil: Zweite Hälfte: Centralcollineation ebener und räumlicher Systeme, Kegelschnitte, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. Mit 218 Erklärungen und 210 Figuren. Von J. Vonderlinn. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.
- Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Vierter Teil: Erste Hälfte: Krumme Linien (ebene und räumliche Kurven). Krumme Oberflächen. Schatten- und Beleuchtungslehre. Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Vierter Teil: Zweite Hälfte: In Vorbereitung.
- Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 236 Erklärungen und 56 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. W. Láska. Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.
- Lehrbuch der Astronomie und der mathematischen Geographie.** Erster Teil: Sphärische Astronomie. Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten, bearbeitet von Prof. Dr. W. Laska. Preis Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.
- Die Nautik in elementarer Behandlung.** Einführung in die Schiffahrtskunde. Zur Förderung des Verständnisses der Schiffahrt in weiteren Kreisen, sowie zum Unterricht an Lehranstalten. Mit 90 vollständig gelösten Beispielen, 260 analogen ungelösten Aufgaben mit den Ergebnissen, nebst 88 Figuren, sowie Erklärung der Kunstausdrücke der Seemannssprache. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Fr. Bolte, Direktor der Navigationsschule in Hamburg. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.
- Lehrbuch der Kartographie.** Die Kartographie nach Einführung der Terraindarstellung in Karten und Plänen. Erster Teil. Nach System Kleyer bearbeitet von Victor Wessely. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

II. Physik, Elektrizität, Chemie, Akustik.

- Lehrbuch der allgemeinen Physik. (Die Grundbegriffe und Grundsätze der Physik.)** Mit 549 Erklärungen, 83 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 120 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.
- Lehrbuch über das spezifische Gewicht fester, flüssiger und gasförmiger Körper.** Mit 35 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: Mk. 2.—. Geb. Mk. 3.—.
- Lehrbuch der absoluten Masse und Dimensionen der physikalischen Grössen.** Mit 545 Erklärungen und einer Sammlung von 561 gelösten und ungelösten Aufgaben, nebst den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. H. Hovestadt. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Lehrbuch des Magnetismus und des Erdmagnetismus nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben, erläutert durch 189 in den Text gedruckten Figuren und 10 Karten. Von **Ad. Kleyer**. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Statik flüssiger Körper (Hydrostatik) mit 425 Erklärungen, 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 208 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert**. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik) mit 291 Erklärungen und 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 359 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert**. Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.

Lehrbuch über die Percussion oder den Stoss fester Körper. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert**. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der Elastizität und Festigkeit mit 212 Erklärungen, 186 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert**. Preis: Mk. 5.50. Geb. Mk. 6.50.

Lehrbuch der Dynamik fester Körper (Geodynamik) mit 690 Erklärungen, 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 500 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert**. Preis: Mk. 13.50. Geb. 14.50.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). **Erster Band:** Die Bewegungserscheinungen flüssiger Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden von Gefässen, sowie durch Röhrenleitungen bei konstanter, sowie veränderlicher Druckhöhe fliessen. Mit 434 Erklärungen, mehr als 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 220 gelösten und ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert**. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). **Zweiter Band:** Erste Hälfte: Die Bewegungserscheinungen des Wassers in Kanälen und Flüssen, sowie der dabei ausgeübte Stoss und Widerstand. Mit 282 Erklärungen, mehr als 150 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 134 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert**. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

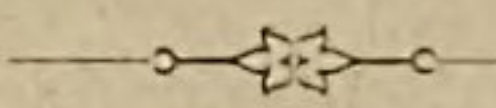
Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). **Zweiter Band:** Zweite Hälfte: Von der Anwendung der lebendigen Kraft des bewegten Wassers als Motor oder Beweger. Mit 203 Erklärungen, 88 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 30 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert**. Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch der Reibungselektrizität (Friktions-Elektrizität, statischen oder ruhenden Elektrizität), erläutert durch 860 Erklärungen und 273 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Von **Ad. Kleyer**. Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

- Lehrbuch der Kontaktelektrizität (Galvanismus)** nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben. Mit 731 Erklärungen, 238 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach System Kleyer von **Dr. Oscar May**. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.
- Lehrbuch der Induktionselektrizität und ihrer Anwendungen (Elemente der Elektrotechnik)**. Mit 432 Erklärungen und 213 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von **Dr. Ad. Krebs**. Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.
- Lehrbuch der Elektrodynamik. Erster Teil**: Mit 105 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Dr. Oscar May**. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.
- Lehrbuch des Elektromagnetismus**. Mit 302 Erklärungen, 152 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von **Dr. O. May** und **Ad. Krebs**. Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.
- Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Erster Band. Die Metalloide**. Mit 2208 Erklärungen, 332 Experimenten und 366 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Wilh. Steffen**. Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—.
- Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Zweiter Band. Die Metalle**. Mit 573 Erklärungen 174 Experimenten und 33 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Wilh. Steffen**. Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—.
- Lehrbuch der Akustik. Erster Band: Periodische Bewegungen, insbesondere Schallwellen**. Mit 257 Erklärungen und 106 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 70 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert**. Preis: Mk. 4,50. Geb. Mk. 5,50.
- Lehrbuch der Akustik. Zweiter Band: Die verschiedenen Tonerreger**. Mit 465 Erklärungen und 315 in den Text eingedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 114 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert**. Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.
- Lehrbuch der Akustik. Dritter Band. Erste Hälfte: Die Fortpflanzungserscheinungen des Schalles, nebst den Erscheinungen zusammengesetzter Schwingungsbewegungen**. Mit 393 Erklärungen und 235 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 66 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert**. Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.
- Lehrbuch der Akustik. Dritter Band. Zweite Hälfte: Praktische Akustik d. i. die Akustik in großen begrenzten Räumen, in Konzert- und Hörsälen, in Kirchen und Theatern**. Mit 136 Erklärungen und 85 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert**. Preis: Mk. 3,50. Geb. Mk. 4,50.
- Entstehung und Entladung der Gewitter, sowie ihre Zerstreuung durch den „Blitzkamm“ (Fulgura frango)**. Eine metereologische Betrachtung von **Richard Klimpert**. Preis gebunden Mk. 2.—.

Anerkennungen aus dem Publikum über Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften.



Herr Pfarrer K a s p a r - Altlussheim schreibt: „Ich werde dieses vorzügliche Werk Ihres Verlages empfehlen, wo ich kann. Ich habe es als das einzige kennen gelernt, das die für Manchen etwas trockene Wissenschaft der Algebra und Geometrie mit Geist und Leben füllt und imstande ist, auch ohne Lehrer die größten Schwierigkeiten überwinden zu helfen. Es ist ein gewaltiges Stück Arbeit, das in den verschiedenen, nach einheitlichem, erprobtem Plane verfaßten Bänden liegt und für das jeder Lernende den Bearbeitern und dem Verlag vielen Dank schuldet. Ich wünsche Ihrem Unternehmen im Interesse der Lernenden die weiteste Verbreitung.“

Bonn. Mit vielem Interesse habe ich Ihre Unternehmung verfolgt, eine praktische math.-naturwissenschaftliche Bibliothek zu schaffen, und in der Erkenntnis, wie sehr eine solche billige Bibliothek dem allgemeinen Bedürfnis entspricht, werde ich nach Kräften für ihre weitere Verbreitung mich bemühen. Ich bin Ihnen dankbar für die Erleichterung, welche Sie auch mir durch Ihr Werk bei meinen Studien geschaffen haben. Namentlich freue ich mich, dass in der Differentialrechnung, bei welcher ja eine einfache, dem Wissen des Anfängers entsprechende Darstellung große Schwierigkeiten bietet, eine so praktische, mit Konsequenz durchgeführte Darstellungsweise von Ihnen gegeben worden ist u. s. f.

F r. B l e n c k e, stud. rer. nat.

Dahbruch b. Siegen. Im Uebrigen kann ich von Ihren Lehrbüchern nur lobenswertes erwähnen und wünsche nur, dass dieselben ein Jahrzehnt eher zur Welt gekommen wären. Es ist mir bis jetzt noch kein Werk in die Hände gekommen, das in so leicht faßlicher Weise dem Schüler die exakten Wissenschaften beizubringen imstand wäre, u. s. f.

W. A l t p e t e r, Ing.

Budapest. Vor allem sei es mir gestattet, Ihnen für den Verlag der Kleyerschen Encyklopädie meine vollste Anerkennung auszusprechen. — Einem Bedürfnis in wirklich vorzüglicher Weise abhelfend, behandeln die Publikationen der erwähnten Sammlung, die mathematischen Disziplinen nach theoretisch und praktisch richtiger Lehrmethode, was ich aus eigener Erfahrung als Lehrer an einer Militärbildungsanstalt vollauf bestätigen kann; indem die handlichen Heftchen mit ihrem reichen Stoff ein wirkliches Lehrbuch für den Schüler und ein vorzügliches Hilfsbuch für den Lehrer bilden.

F e r d. v o n J e r z a b e k, k. k. Leutnant.

Engelberg, Benediktiner-Stift. Da Ihr Werk „math.-tech.-naturwissenschaftliche Encyklopädie“, soweit es bis heute vollendet vorliegt, auch an unserem Gymnasium allseitig wohlverdiente Anerkennung gefunden hat, so möchte speziell ich, als Lehrer der Mathematik, Ihnen heute die Gefühle meines Dankes und meiner Hochachtung für das treffliche Werk bekunden. Die bis ins Detail gehende, dabei doch so übersichtlich geordnete, leicht faßliche, klare Entwicklung der Beweise ist es ganz besonders, die mir Ihr Werk lieb und teuer macht, deswegen meinen herzlichsten Dank für Ihre mühevollen, so meisterhaft ausgeführte Arbeit, u. s. f.

P. B a s i l i u s F e l l m a n n, O. S. B.

Oberwinterthur. Vor allem empfangen Sie meinen wärmsten Dank für die Initiative und im allgemeinen glückliche Ausführung der Idee. Gewiß kann jeder mit fleißiger Benutzung Ihrer geschätzten Hefte durch Selbstunterricht schöne Erfolge in dieser Disziplin erzielen, u. s. f.

J a c o b F l u r, Lehrer.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Hartford (Connecticut). Ich wünsche Ihnen unaufgefordert meinen Gefallen über den Vorteil auszudrücken, welchen ich bei verschiedentlichem Gebrauch bei der Behandlung Ihrer wirklich ausgezeichneten Kleyerschen mathematisch-technischen-naturwissenschaftlichen Encyklopädie gehabt habe. Ich habe nicht allein eine große persönliche Begeisterung für sie, sondern ich habe dieselbe mit Nutzen auch in meiner Schule gebraucht. Ich bin Lehrer der Mathematik an der Public Highe School (gleichbedeutend mit Ihren Gymnasien und Realschulen), u. s. f.

H o m e r W. B r a i n a r d.

Berlin. Seit zwei Jahren beziehe ich nun schon von meiner Buchhandlung Ihre Kleyer-Bandausgaben. Welche Dienste sie mir geleistet, vermag ich auf diesem kleinen Raume nicht auszusprechen.

H. S c h a e p e l jr., Gymnasiast.

Herr Dr. Otto Willareth in Sand i. Elsass schreibt an den Verleger: Vermutlich macht es Ihnen Freude und ist es in Ihrem Geschäfts-Interesse wichtig, meine Anzeige über Ihr Verlagsunternehmen Kleyers Encyklopädie zu erhalten, welche ich in der „Straßburger Post“, dem größten Blatt von Südwest-Deutschland, No. 809 vom 11. September 1901, habe erscheinen lassen. Deshalb gestatte ich mir, Ihnen diese Besprechung als Drucksache zu übersenden. Mit dieser Besprechung möchte ich Ihnen und den Verfassern dieser Encyklopädie eine Dankesschuld abtragen für eines der segensreichsten litterarischen Unternehmen der Gegenwart. Ich besitze einen bedeutenden Teil Ihrer Encyklopädie und stets ist es mir eine Freude, darin zu arbeiten. Jedenfalls liegt es im Interesse der Sache, dass sie möglichst bekannt und verbreitet wird, damit Ihnen und den Herren Verfassern die Lust nicht an dem mühevollen Unternehmen ausgeht etc.

Berlin. Durch einen glücklichen Zufall wurde ich vor Kurzem mit Kleyers Encyklopädie bekannt und ich bemerkte nach kurzem Studium derselben, dass ein vortreffliches Werk im Erscheinen begriffen sei, u. s. f.

E d m. K o e b k e, stud. math.

Währing b. Wien. Da das unter Ihrer werten Leitung erscheinende voluminöse Werk leider erst einige Teile vollständig enthält, aber entschieden das Vortrefflichste in Bezug auf Selbststudium leistet, u. s. f.

J o s e p h H a c k e n b e r g, Beamter.

Traunstein. Es würde mich herzlich freuen, wenn es mir in meiner Besprechung gelungen wäre, das Interesse eines weiteren Leserkreises für Ihr großartiges, wahrhaft zeitgemäßes und eminent praktisches Unternehmen nachhaltig anzuregen.

R. K n i l l i n g, Lehrer.

Braunschweig ich war überrascht und hocherfreut über ein Unternehmen (bezieht sich auf den chemischen Teil der Encyklopädie. Die Redakt.), welches mir so ganz aus der Seele herausgeschrieben war. . . . Wie Sie den Stoff behandeln, wird er noch von keiner Seite auch nur annähernd gehandhabt, abgesehen von Katechismen, u. s. f. . . . Gestatten Sie mir als praktischem Lehrer der Chemie, der viele heterogene Elemente zu unterrichten hat, Ihnen zu diesem schönen Werke meinen verbindlichsten Glückwunsch auszusprechen. Möge es Ihnen vergönnt sein, das Werk in dem Sinne des Prospektus zu Ende zu führen, und glaube ich fest, dass die wirklichen Lehrer der Chemie Ihnen zu vollem Dank verpflichtet sein werden, u. s. f.

D r. E d. F r e i s e, Direktor der Droguisten-Fachakademie.

Cambridge (England). Während meines Besuches in Kreuznach habe ich mich interessiert, einige deutsche Schulbücher mit unseren englischen zu vergleichen. Ich habe mehrere Hefte der Kleyerschen Encyklopädie durchgeblättert und finde, dass dieselben höchst praktisch und brauchbar sind, besonders für die zuwachsende Anzahl selbstunterrichtender Studenten. Ich bin ein Sachkenner in der reinen und angewandten Mathematik, Ehrengraduatus (etwa wie deutscher Ph.-Doktor) und Dozent in der Cambridge Universität und würde sehr gerne helfen, einige Hefte zu übersetzen. Ich werde auch Mitarbeiter finden können, dass es möglich wird, nach und nach vielleicht das ganze Werk in englisch herauszugeben. Wenn Ihnen dieser Vorschlag gefällt, können wir später Näheres darüber erörtern. Ich glaube, dass eine Uebersetzung einen sehr guten Verkauf haben würde, nicht nur in Großbritannien und Irland, sondern auch in Amerika und in den britischen Kolonien.

T h e o d o r e E. W o r l l e d g e.

Wien. Gestatten Sie uns, Ihnen unsern Dank für Ihre einzig dastehende Aufgabensammlung, die wir schon bei ihrem ersten Erscheinen mit Freuden begrüßten, u. s. f. . . . Genehmigen Sie deshalb den Dank für Ihre ausgezeichnete Encyklopädie.

Mehrere Studierende der Wiener Universität.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Sundswall (Schweden). Im Besitze einiger Hefte der ausgezeichneten Kleyerschen Encyklopädie bin ich so frei gewesen, in der beigelegten Zeitung die Aufmerksamkeit des schwedischen Publikums darauf zu richten und ist es meine Hoffnung, sowohl den Interessenten, als Ihnen einen Dienst erwiesen zu haben. Das Werk ist in Schweden leider zu wenig bekannt.
D. F. Lundgren.

Brünn. Als erster Abnehmer Ihrer in der That sehr vortrefflichen Encyklopädie, u. s. f. Meine zahlreichen Schüler machen den besten Gebrauch von dieser einzig dastehenden Aufgabensammlung und bitten unaufhörlich, zu veranlassen, dass weitere Teile erscheinen.
Franz Schwaben, Lehrer.

Bergedorf bei Hamburg. Bereits im Besitze mehrerer Bände der Kleyerschen Encyklopädie habe ich die vortrefflichen Werke schon vielen Interessenten mit Erfolg empfohlen.
Albert Zander, Lehrer an der Hansaschule.

Gleiwitz.; deshalb habe ich mit Freuden Ihr Werk begrüßt, u. s. f.; ich aber mit förmlicher Begierde Ihre so klar gelösten Aufgaben, u. s. f.
George Feumer.

Coburg. Bitte um sehr gefl. Mitteilung, bis wann die Lehrbücher über Bau- und Ingenieurwissenschaften nach System Kleyer erscheinen werden. Mit derartigen Büchern würden Sie die ganze Welt erfreuen. Ist Integralrechnung II. Teil erschienen?
J. Eichhorn, Zivilingenieur und Patentanwalt.

Selmeczbanya (Ungarn). und ich muß offen gestehen, dass, wenn ich mich auch der deutschen Sprache noch nicht mächtig genug fühle, so werde ich doch am schnellsten aus diesem Werke zum Ziel gereichen, und eher lerne ich die Sprache, als dass ich das Werk nicht benutze, u. s. f.
Ludwig Veress.

Linz. Anschließend spreche ich Euer Wohlgeboren meinen herzlichsten Dank aus für die Herausgabe Ihrer trefflichen Aufgabenhefte, die mir Gelegenheit verschaffen, mir privat und ohne große Auslagen Kenntniss von allen Partien der reinen und angewandten Mathematik zu verschaffen, u. s. f. Hermann Bauernberger, stud. theol.

Bochum i. W. Ew. Hochwohlgeboren im Erscheinen begriffenes, so lehrreiches und auch von Laien leichtverständlich gehaltenes Werk: „Die elektrischen Erscheinungen und Wirkungen“ habe ich mit Freuden begrüßt, u. s. f.
C. P. Kupfer.

Urteile der Presse

über Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

Pädagogisches Jahrbuch von Emil Schneider. Dem Verlage von L. v. Vangerow, Bremerhaven, gebührt das Verdienst, durch Herausgabe der Kleyerschen Encyklopädie ein Werk geschaffen zu haben, das durch die Art seines Erscheinens und durch die Eigentümlichkeit in der Behandlung des Stoffes auch diejenigen, die keine gelehrte Schule besucht haben, in den Stand setzt, sich durch eigenen Fleiß ein reiches und gründliches Wissen zu erwerben. Der vorliegende Band ist in jeder Beziehung eine Musterleistung und wird hiermit wie das ganze Werk nachdrücklichst empfohlen. Man kann nur wünschen, dass uns der rühmlichst bekannte Verfasser bald mit einem nach demselben Plane bearbeiteten Lieferungswerke über die beschreibenden Naturwissenschaften beschenken möge.

Naturae Novitates. Die Kleyersche Encyklopädie ist dem Studierenden schon längst ein wohlbekanntes, unentbehrliches Hilfsmittel geworden, so dass man als die beste Empfehlung der neu vorliegenden Bände bezeichnen kann, dass diese sich in Inhalt und Form würdig ihren Vorgängern anschließen.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Literaturblatt für höhere Schulen. Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). Erster Teil. Wenn man nach der vorliegenden Schrift die ganze Kleyersche Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften beurteilen darf, so verdient dieses Unternehmen weit mehr Beachtung und Unterstützung, als es bislang in Kollegenkreisen gefunden hat. Offen gestanden bin ich mit dem Verdachte an die Lektüre dieses Buches herangetreten, dass es, als für den Selbstunterricht und die elementare Technik berechnet, in wissenschaftlicher Beziehung manches zu wünschen übrig lassen werde. Aber ich bin sehr angenehm enttäuscht worden; das Buch ist durchaus wissenschaftlich angelegt und weit gründlicher durchdacht, als die meisten Lehrbücher der Stereometrie; dass es dabei auch vielfach auf die Praxis des Lebens eingeht, kann ihm nur zur weiteren Empfehlung gereichen. Mir ist keine Schrift bekannt, welche die räumlichen Lageverhältnisse von Geraden und Ebenen mit der Allgemeinheit und Gründlichkeit untersucht, wie die vorliegende Stereometrie. Ganz besonderen Wert hat das Buch auch dadurch, dass eine große Menge konstruktiver Aufgaben erschöpfend oder wenigstens mit Andeutungen zur Lösung vorgeführt wird; besonders sorgfältig ist stets die Determination behandelt. Allen Kollegen, die bislang die konstruktive Seite der Stereometrie weniger beachtet haben, sei hiermit das Seippsche Buch nachdrücklichst empfohlen; ebenso seien die Studierenden zur Ausbildung ihrer Raumanschauung darauf hingewiesen, um so lieber, als die Zeichnungen durchweg mustergültig sind.

Pfälzische Lehrerzeitung. Von diesem großartigen, bis jetzt unerreicht dastehenden Unternehmen liegen uns weitere Bände vor. Für die Zwecke des Selbststudiums sind diese Werke das Beste, was es giebt. Auch in Schulen dürften sie mit großem Nutzen zu gebrauchen sein.

Literaturblatt für katholische Erzieher. Bezüglich dieser nach Kleyers System bearbeiteten Lehrbücher können wir uns kurz fassen. „Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen etc. Wissenschaften bietet, wie bereits allgemein anerkannt, die besten Unterrichtsmittel.“

Pädagogisches Literaturblatt. Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Anlage und Ausführung des Sachsschen Lehrbuchs sind vorzüglich. Der Verleger hat für eine gute Ausstattung Sorge getragen, die Figuren insbesondere zeichnen sich durch wohltuende Klarheit und Schärfe aus. Gesamturteil: das Buch ist für den Selbstunterricht, wie auch zum Gebrauch an entsprechenden Unterrichtsanstalten nach jeder Richtung hin aufs beste geeignet.

Der Techniker, New York. Die systematische Einteilung und Behandlung des umfangreichen Lehrmaterials mit zahlreichen erläuternden Aufgaben und Beispielen, wie in dem vorliegenden Werke, ist sehr fördernd und anregend für das Studium und ein allseitig anerkannter Vorzug der Kleyerschen Unterrichtsmethode; so verfaßte Lehrbücher sind nicht allein für Schulunterricht, sondern auch zum Selbststudium und als Nachschlagebücher für den praktischen Fachmann von hohem Nutzen.

Zeitschrift für Realschulwesen, Wien. Hovestadt, Lehrbuch der absoluten Masse u. Dimensionen der physikalischen Größen. Das Buch, welches den Gegenstand mit der möglichsten Vollständigkeit behandelt, zeigt bei einer anfangs ausführlichen, später knappen Darstellung doch durchgehends jene Klarheit, die gerade für diesen Teil der Wissenschaft nötig ist. Es wird sich dasselbe daher überall als eine gute Einleitung in das wissenschaftliche Studium der Physik empfehlen.

Magazin für Pädagogik. Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Erster und Zweiter Teil. An solchen Werken haben wir freilich noch keinen Ueberfluß und wir möchten einem jeden raten, der sich ohne Hilfe eines Lehrers tiefer in dieses Gebiet einzuarbeiten wünschte, sei es zum Zwecke der Ersthörung einer Prüfung, sei es aus besonderer Liebhaberei zu diesem schönen Zweig der Mathematik, zu diesem ausgezeichneten Werke zu greifen. Nur mit hoher Befriedigung und reichem Gewinn wird er dasselbe aus der Hand legen.

Prakt. Physik. Der Verfasser hält vollkommen, was er verspricht; er ist ein Meister in der Entwicklung und Klarstellung der Grundbegriffe und macht dadurch seine Arbeit vor allem für den angehenden Lehrer und für die Selbstausbildung geeignet, und mancher ältere Lernende wird sagen: Hätte man mir solches in meiner Jugend geboten!

Baukunde.

Statik für Hoch- und Tiefbautechniker. Ein Lehrbuch für den Unterricht an bautechnischen Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht und Nachschlagen mit 194 Übungsaufgaben und 486 Figuren nebst einem Anhang von Tabellen. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn**, Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. 3. Auflage. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 5,50.

Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. **Erster Teil: Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektionslehre, Konstruktion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie, einfache Dachausmittlungen.** Mit 345 Figuren. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn**, Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W.. 2. Auflage. Preis: Mk. 3.—. In Schuleinband Mk. 3,30.

Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. **Zweiter Teil: Schattenlehre, Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers, Schiftung bei Dächern, Windschiefe Dächer, Darstellung eines Treppenkrümmings, Steinschnitt, Centralperspektive. Anhang: Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern.** Mit 354 Figuren. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn**, Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. 2. Auflage. Preis: 3.—. In Schuleinband Mk. 3,30.

Vorlegeblätter für den Unterricht im Linear- und Projektionszeichnen. Zum Gebrauche an Realschulen, höheren Bürgerschulen, gewerblichen Fortbildungsschulen, Gewerbe- und Handwerkerschulen usw. **12 Tafeln mit erläuterndem Texte.** Entworfen und gezeichnet von **Prof. J. Vonderlinn**, Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. In Mappe: Mk. 5,50.

Das Zeichnen der Stereometrie. Als Vorschule zur darstellenden Geometrie und zum Fachzeichnen für Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. 28 Tafeln mit Text. Von **Prof. A. Brude**. Preis: Mk. 6.—.

/ Kleyer, Adolph / Sachs, Joseph

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie) für den
Schulunterricht und das Selbststudium

Bd.: 2

1890

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.150-m(1#2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11841068-1